

Geometria analitica di base (prima parte)



SAPERE

Al termine di questo capitolo, avrai appreso:

- come fissare un sistema di riferimento cartesiano ortogonale
- il significato di equazione di una retta
- il significato di coefficiente angolare di una retta
- i concetti di parallelismo e di perpendicolarità
- il concetto di fascio di rette proprio o improprio
- la definizione di funzione reale di variabile reale
- la definizione di funzione affine
- il concetto di funzione a tratti

SAPER FARE

Al termine di questo capitolo, sarai in grado di:

- rappresentare in un piano cartesiano un punto di coordinate note
- calcolare la distanza tra due punti di un piano cartesiano
- determinare le coordinate del punto medio di un segmento
- determinare l'equazione esplicita di una retta generica del piano cartesiano, nota quella implicita (e viceversa)
- distinguere i diversi tipi di funzioni affini
- individuare il grafico di una funzione affine
- risolvere graficamente un'equazione numerica intera di primo grado in una o due incognite
- individuare le posizioni reciproche di due rette, anche in funzione del loro coefficiente angolare



Punti e rette nel piano cartesiano

■ Sistema di coordinate su una retta

Sia r una retta qualsiasi. Su r è possibile fissare un **verso positivo** e un **verso negativo**, l'uno opposto all'altro.

Se si disegna la retta r orizzontalmente rispetto al lettore, di solito il verso positivo è quello che va da sinistra verso destra e viene indicato con una freccia. Il verso negativo è quello contrario a quello positivo (quello che va da destra verso sinistra).



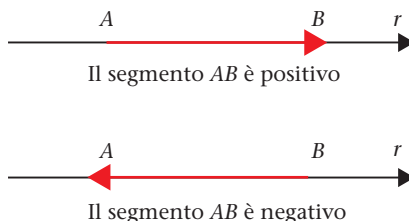
Se si disegna la retta r verticalmente rispetto al lettore, di solito il verso positivo è quello che va dal basso verso l'alto. Il verso negativo è quello che va dall'alto verso il basso.



Una retta sulla quale è stato fissato un verso prende il nome di **retta orientata**.

È possibile fissare un verso anche su un segmento qualsiasi AB di una retta. In tal caso, il segmento si dice **orientato**.

Un segmento orientato appartenente a una retta orientata è **positivo** se il suo verso positivo coincide col verso positivo della retta a cui esso appartiene; altrimenti si dice **negativo**.



Siano r una retta orientata e O un punto qualsiasi della retta.

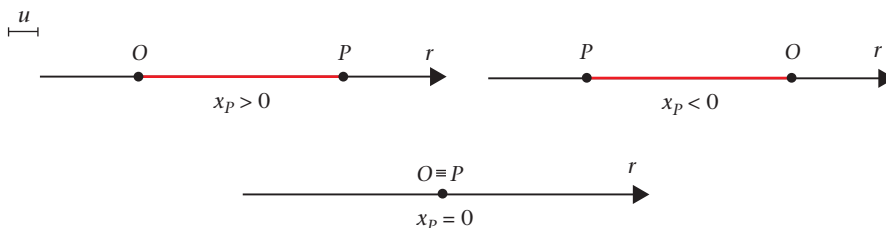
O divide la retta in due semirette: una **positiva**, che contiene i punti che seguono O nel verso positivo, e una **negativa**, che contiene i punti che precedono O .

È noto che tra i punti di una retta orientata e l'insieme dei numeri reali esiste una corrispondenza biunivoca: a ogni numero reale è associato un punto della retta e ad ogni punto della retta è associato un numero reale. Una retta siffatta prende il nome di **retta reale**.

Si fissi allora su r un segmento unità di misura u e sia P un punto di r . La misura del segmento OP rispetto al segmento u prende il nome di **misura algebrica** di OP .

Sulla retta r viene così fissato un **sistema di coordinate ascisse** e la misura algebrica di OP prende il nome di **coordinata ascissa** o semplicemente **ascissa** di P .

L'ascissa di P si indicherà con x_P . Essa è positiva se P appartiene alla semiretta positiva di r ; è negativa se P appartiene alla semiretta negativa di r ; è nulla se P coincide con il punto O .



■ Distanza tra due punti della retta reale

Teorema

La **distanza** tra due punti qualsiasi di una retta, sulla quale è fissato un sistema di coordinate, è uguale al valore assoluto della differenza delle loro ascisse.

La distanza tra due punti P e Q si indica con $\overline{PQ}$ e prende il nome di **misura assoluta** del segmento PQ .

Siano P e Q due punti di una retta r sulla quale è fissato un sistema di coordinate, x_P e x_Q rispettivamente le ascisse di P e di Q .

Ipotesi: Q segue P secondo il verso fissato sulla retta r .

Tesi: $\overline{PQ} = |x_Q - x_P|$.

Dimostrazione:

Osservando la figura, si costata facilmente che il segmento OQ è dato dalla somma dei segmenti OP e PQ : $OQ \cong OP + PQ$.

L'uguaglianza resta valida anche passando alle lunghezze dei segmenti: $\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ}$.

Se x_P e x_Q sono rispettivamente le ascisse di P e di Q , l'uguaglianza precedente assume la forma: $x_Q = x_P + \overline{PQ}$, dalla quale si ricava che: $\overline{PQ} = x_Q - x_P$.

In modo analogo, se P segue Q , secondo il verso fissato sulla retta r , si dimostra che

$$\overline{PQ} = \overline{QP} = x_P - x_Q$$

La tesi è quindi dimostrata. ■

$x_Q - x_P$ è una quantità positiva se Q segue P , secondo il verso fissato sulla retta, ma è negativa se P segue Q . Questo è il motivo per cui nella formula generale della misura assoluta di un segmento è necessario ricorrere al valore assoluto: $\overline{PQ} = |x_Q - x_P|$.

Il valore assoluto garantisce infatti che la differenza non sia negativa e consente di scambiare la posizione delle coordinate coinvolte nella differenza (essa resta quindi valida, a prescindere della posizione dei punti rispetto a O): $|x_Q - x_P| = |x_P - x_Q|$.

esempio

- Se $x_A = -3$ e $x_B = -6$, allora: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = |-6 - (-3)| = 3$.
- Se $x_A = \frac{1}{2}$ e $x_B = 1$, allora: $\overline{AB} = |x_B - x_A| = \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
- Se $x_A = 4$ e $x_B = -1$, allora: $\overline{AB} = |x_A - x_B| = |4 - (-1)| = 5$

■ Punto medio di un segmento sulla retta reale

Teorema

L'ascissa del **punto medio** di un segmento, appartenente a una retta sulla quale è fissato un sistema di coordinate, è uguale alla semisomma delle ascisse degli estremi.

Siano P e Q gli estremi di un segmento appartenente a una retta sulla quale è fissato un sistema di coordinate.

Siano x_M , x_Q e x_P rispettivamente le ascisse di M , di Q e di P .

Ipotesi: Q segue P e M è il punto medio del segmento PQ .

Tesi: $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$



Dimostrazione:

Se si osserva la figura, è possibile notare che, poiché M è il punto medio di PQ , sarà: $PM \equiv MQ$, per cui, passando alle misure assolute (lunghezze) dei segmenti, si avrà:

$$|x_M - x_P| = |x_Q - x_M|$$

Poiché M segue P e Q segue M , le differenze contenute all'interno dei due valori assoluti sono numeri positivi quindi si potrà scrivere: $x_M - x_P = x_Q - x_M$.

Se si trasporta x_M nel primo membro e x_P nel secondo, si ottiene:

$$x_M + x_M = x_P + x_Q \Rightarrow 2x_M = x_P + x_Q$$

Se si dividono entrambi i membri per 2, si ricava la **formula per calcolare l'ascissa del punto medio di un segmento PQ**: $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$.

La tesi è quindi dimostrata. ■

Dalla formula si ricavano le due formule inverse: $x_Q = 2x_M - x_P$ e $x_P = 2x_M - x_Q$, utili per individuare l'ascissa di uno dei due estremi di un segmento, quando sono note quella del punto medio e quella dell'altro estremo del segmento.

esempio

Calcolare l'ascissa x_M del punto medio del segmento avente estremi nei punti A e B rispettivamente di ascisse: $x_A = -3$ e $x_B = -6$.

Se si applica la formula, si ottiene: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-3 + (-6)}{2} = -\frac{9}{2}$.

■ Piano cartesiano

Si considerino nel piano due rette perpendicolari x e y (x posta orizzontalmente e y , quindi, verticalmente rispetto al lettore) e si fissi su ciascuna di esse un sistema di coordinate tale che:

- il punto O di intersezione di x e y sia il punto origine dei due sistemi di coordinate ascisse fissati sulle due rette;
- su entrambe le rette venga fissata la stessa unità di misura;
- il verso positivo sulla retta x sia quello che va da sinistra verso destra (rispetto al lettore); quello positivo sulla retta y , quello che dal basso va verso l'alto (rispetto al lettore).

In queste ipotesi, si dice che nel piano è fissato un **sistema di riferimento cartesiano ortogonale xOy** o un **piano cartesiano**.

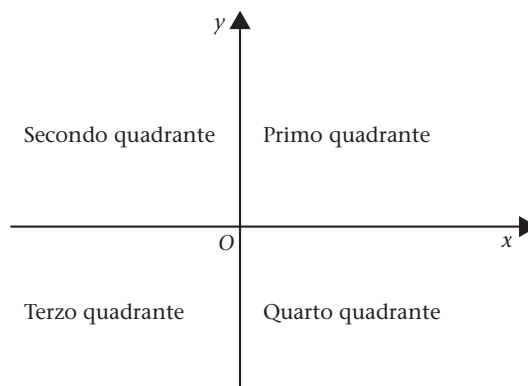
Le rette x e y prendono il nome di **assi cartesiani** che, rispettivamente, prendono il nome di **asse x** e **asse y** .

Le semirette di origine O appartenenti ai due assi prendono il nome di **semiassi**.

Il semiasse dell'asse x che contiene i punti che seguono O prende il nome di **semiasse positivo dell'asse x** ; l'altro è detto **semiasse negativo dell'asse x** .

Gli stessi concetti possono essere estesi anche all'asse y .

I due assi dividono il piano in quattro angoli, chiamati **quadranti**, che si numerano in senso antiorario a partire da quello posto in alto a destra rispetto al lettore:



■ Coordinate di un punto nel piano cartesiano

Teorema

Tra i punti di un piano cartesiano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali esiste una corrispondenza biunivoca.

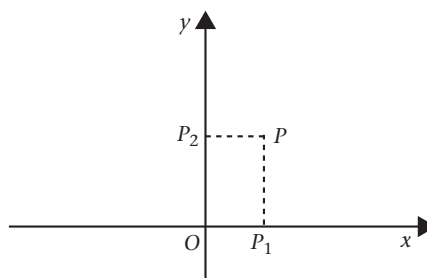
Ipotesi: P è un punto qualsiasi del piano cartesiano.

Tesi: Al punto P corrisponde una coppia di numeri reali (x_P, y_P) .

Dimostrazione:

Si conduca da P la parallela all'asse y e sia P_1 il punto di intersezione con l'asse delle x .

Si conduca da P la parallela all'asse x e sia P_2 il punto di intersezione con l'asse delle y .



Sulla retta x è fissato un sistema di coordinate ascisse, pertanto al punto P_1 è associato un numero reale x_P ; in modo analogo, al punto P_2 è associato un numero reale y_P . Al punto P resta quindi associata la coppia ordinata $(x_P; y_P)$ di numeri reali che prendono il nome di **coordinate cartesiane del punto P** .

x_P , prima componente della coppia, rappresenta l'**ascissa** del punto P ; y_P , seconda componente della coppia, rappresenta l'**ordinata** del punto P . Per tale motivo, l'asse x è anche chiamato **asse delle ascisse** e l'asse y , **asse delle ordinate**.

Viceversa

Ipotesi: $(x; y)$ è una coppia di numeri reali.

Tesi: Alla coppia $(x; y)$ corrisponde un punto P del piano cartesiano.

Dimostrazione

Si prenda sull'asse x il punto P_1 di coordinata x e, sull'asse y , il punto P_2 di coordinata y . Le parallele agli assi condotte da P_1 e da P_2 si intersecano in un punto P , che così viene univocamente determinato.

In definitiva, a un punto qualsiasi P del piano è possibile associare una coppia di numeri reali, le sue **coordinate** nel piano cartesiano.

Viceversa, a una coppia ordinata di numeri reali $(x; y)$ è possibile associare un punto P del piano.

Tra i punti di un piano cartesiano e l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali esiste dunque una **corrispondenza biunivoca**.

La tesi è quindi dimostrata. ■

Si scriverà $P(x; y)$ e si leggerà *P di coordinate x e y* .

Tra queste ultime si interpone un punto e virgola per non confondere le coordinate del punto avente ascissa x e ordinata y con l'intervallo numerico (x, y) costituito dagli infiniti numeri compresi tra il numero x e il numero y .

■ Segno delle coordinate di un punto del piano cartesiano

Rispetto al verso positivo fissato su ciascun asse, si deduce che:

- ciascuno dei punti interni al primo quadrante possiede ascissa positiva e ordinata positiva;
- ciascuno dei punti interni al secondo quadrante possiede ascissa negativa e ordinata positiva;
- ciascuno dei punti interni al terzo quadrante possiede ascissa negativa e ordinata negativa;
- ciascuno dei punti interni al quarto quadrante possiede ascissa positiva e ordinata negativa;
- l'origine possiede ascissa e ordinata nulle;

Quadrante di appartenenza	Coordinate di P	
	Ascissa x_P	Ordinata y_P
Primo	>0	>0
Secondo	<0	>0
Terzo	<0	<0
Quarto	>0	<0

- ciascuno dei punti che appartengono al semiasse positivo dell'asse x possiede ascissa positiva e ordinata nulla;
- ciascuno dei punti che appartengono al semiasse negativo dell'asse x possiede ascissa negativa e ordinata nulla;
- ciascuno dei punti che appartengono al semiasse positivo dell'asse y possiede ascissa nulla e ordinata positiva;

- ciascuno dei punti che appartiene al semiasse negativo dell'asse y possiede ascissa nulla e ordinata negativa.

Viceversa, dall'esame delle coordinate di un punto si deduce il quadrante o l'asse di appartenenza del punto o si desume se il punto coincide con l'origine.

esempio

Rappresentare nel piano cartesiano i punti aventi le seguenti coordinate:

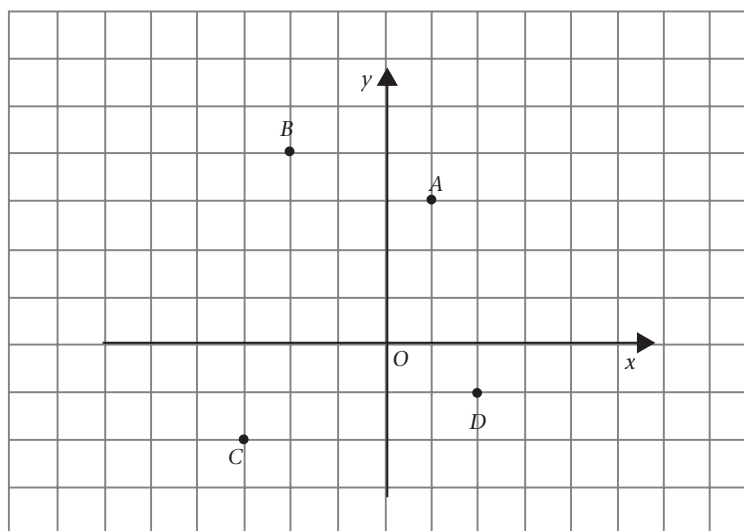
$A(1; 3)$, $B(-2; 4)$, $C(-3; -2)$ e $D(2; -1)$.

Si esaminino le coordinate dei punti A , B , C , D .

- L'ascissa e l'ordinata di A hanno segno positivo ($x_A = 1$, $y_A = 3$) quindi A appartiene al primo quadrante.
- L'ascissa di B è negativa e l'ordinata positiva ($x_B = -2$, $y_B = 4$) quindi B appartiene al secondo quadrante.
- L'ascissa e l'ordinata di C sono negative ($x_C = -3$, $y_C = -2$) quindi C appartiene al terzo quadrante.
- L'ascissa di D è positiva e l'ordinata negativa ($x_D = 2$, $y_D = -1$) quindi D appartiene al quarto quadrante.

Disegnato un piano cartesiano su un foglio quadrettato e scelta un'unità di misura, per esempio il lato di un quadretto, per rappresentare ciascuno dei punti assegnati, si posiziona la matita sull'origine O e relativamente al punto:

- A , si conta un quadretto ($x_A = 1$) verso destra (verso destra perché l'ascissa è positiva) e, da quel punto, tre quadretti ($y_A = 3$) verso l'alto (verso l'alto perché l'ordinata è positiva);
- B , si contano due quadretti ($x_B = -2$) verso sinistra (verso sinistra perché l'ascissa è negativa) e, da quel punto, quattro quadretti verso l'alto ($y_B = 4$);
- C , si contano tre quadretti ($x_C = -3$) verso sinistra (verso sinistra perché l'ascissa è negativa) e, da quel punto, due quadretti ($y_C = -2$) verso il basso (verso il basso perché l'ordinata è negativa);
- D , si contano due quadretti ($x_D = 2$) verso destra (verso destra perché l'ascissa è positiva) e, da quel punto, un quadretto ($y_D = -1$) verso il basso (verso il basso perché l'ordinata è negativa).



■ Distanza tra due punti di un piano cartesiano

Siano P e Q due punti di un piano cartesiano aventi rispettivamente coordinate: $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$.

Per calcolare la distanza tra P e Q , si deve tener conto della posizione dei due punti nel piano cartesiano.

I casi possibili che possono verificarsi sono cinque:

Caso 1: P e Q appartengono all'asse x ;

Caso 2: P e Q appartengono all'asse y ;

Caso 3: la retta del segmento PQ è parallela all'asse x ;

Caso 4: la retta del segmento PQ è parallela all'asse y ;

Caso 5: P e Q non appartengono ad alcun asse cartesiano, né a una retta parallela a uno degli assi.

Caso 1: P e Q appartengono all'asse x

Teorema

La **distanza** tra due punti appartenenti all'asse x è uguale al valore assoluto della differenza delle loro ascisse.

Siano P e Q due punti dell'asse x .

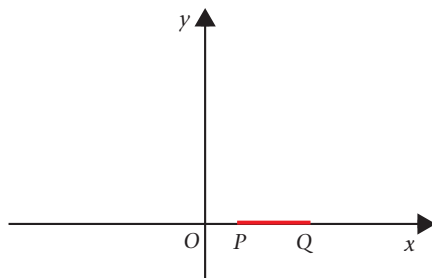
Ipotesi: $P(x_P; 0)$ e $Q(x_Q; 0)$

Tesi: $\overline{PQ} = |x_P - x_Q|$

Dimostrazione:

P e Q appartengono a una retta sulla quale è fissato un sistema di coordinate (ascisse), quindi la loro distanza è uguale al valore assoluto della differenza delle loro coordinate ascisse.

Si potrà allora scrivere: $\overline{PQ} = |x_P - x_Q|$, che rappresenta la **formula della distanza tra due punti dell'asse delle ascisse**. La tesi è quindi dimostrata. ■



Caso 2: P e Q appartengono all'asse y

Teorema

La **distanza** tra due punti appartenenti all'asse y è uguale al valore assoluto della differenza delle loro ordinate.

Siano P e Q due punti dell'asse y .

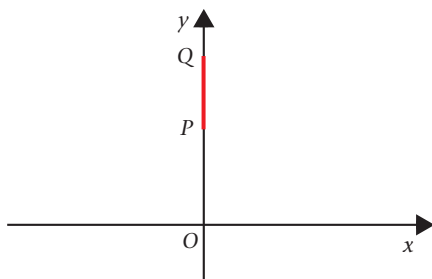
Ipotesi: $P(0; y_P)$ e $Q(0; y_Q)$

Tesi: $\overline{PQ} = |y_P - y_Q|$

Dimostrazione:

P e Q appartengono a una retta sulla quale è fissato un sistema di coordinate (ordinate), quindi la loro distanza è uguale al valore assoluto della differenza delle loro coordinate ordinate.

Si potrà allora scrivere: $\overline{PQ} = |y_P - y_Q|$, che rappresenta la **formula della distanza tra due punti dell'asse delle ordinate**. La tesi è quindi dimostrata. ■



Caso 3: La retta del segmento PQ è parallela all'asse x **Teorema**

La **distanza** tra due punti appartenenti a una retta parallela all'asse x è uguale al valore assoluto della differenza delle loro ascisse.

Siano P e Q due punti appartenenti a una retta parallela all'asse x .

Ipotesi: $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$ e la retta del segmento PQ è parallela all'asse x

Tesi: $\overline{PQ} = |x_P - x_Q|$

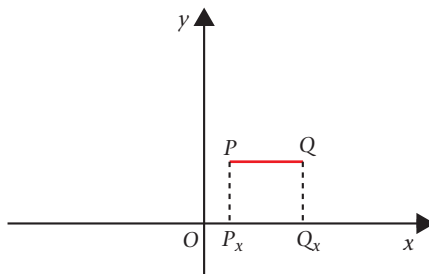
Dimostrazione:

Se il segmento PQ è parallelo all'asse x , allora i punti P e Q hanno ordinate uguali: $y_P = y_Q$

e, inoltre, è anche: $\overline{PQ} = \overline{P_x Q_x}$.

Poiché $\overline{P_x Q_x} = |x_P - x_Q|$, si avrà: $\overline{PQ} = |x_P - x_Q|$, che rappresenta la **formula della distanza tra due punti appartenenti a una retta parallela all'asse x** .

La tesi è quindi dimostrata. ■

**Caso 4: La retta del segmento PQ è parallela all'asse y** **Teorema**

La **distanza** tra due punti appartenenti a una retta parallela all'asse y è uguale al valore assoluto della differenza delle loro ordinate.

Siano P e Q due punti appartenenti a una retta parallela all'asse y .

Ipotesi: $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$ e la retta del segmento PQ è parallela all'asse y

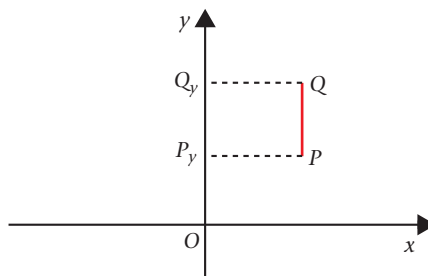
Tesi: $\overline{PQ} = |y_P - y_Q|$

Dimostrazione:

Se il segmento PQ è parallelo all'asse y , allora i punti P e Q hanno ascisse uguali: $x_P = x_Q$

e, inoltre, è anche: $\overline{PQ} = \overline{P_y Q_y}$.

Poiché $\overline{P_y Q_y} = |y_P - y_Q|$, si avrà: $\overline{PQ} = |y_P - y_Q|$ che rappresenta la **formula della distanza tra due punti appartenenti a una retta parallela all'asse y** . La tesi è quindi dimostrata. ■

**Caso 5: P e Q non appartengono ad alcun asse cartesiano, né a una retta parallela a uno degli assi****Teorema**

La **distanza** tra due punti che non appartengono ad alcun asse cartesiano, né a una retta parallela a uno degli assi è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle differenze delle coordinate omonime.

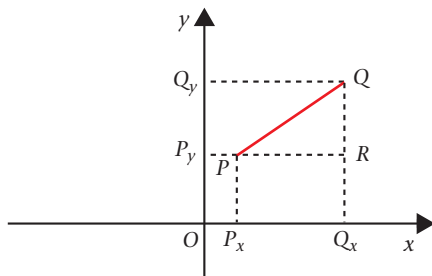
Siano P e Q due punti che non appartengono ad alcun asse cartesiano, né a una retta parallela a uno degli assi.

Ipotesi: $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$.

Tesi: $\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

Dimostrazione:

Si traccino da P e da Q le parallele agli assi.



Se si applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo PRQ , si potrà scrivere:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2}$$

R e Q hanno la stessa ascissa: $x_R = x_Q$, P e R la stessa ordinata: $y_R = y_P$, per cui, per quanto visto nei casi precedenti, si avrà:

$$\overline{PR} = |x_R - x_P| = |x_Q - x_P| \quad \text{e} \quad \overline{RQ} = |y_Q - y_R| = |y_Q - y_P|$$

Se i valori ottenuti si sostituiscono nell'uguaglianza: $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PR}^2 + \overline{RQ}^2}$, si ottiene:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

che rappresenta la **formula della distanza tra due punti che non appartengono ad alcun asse cartesiano, né a una retta parallela a uno degli assi**. La tesi è quindi dimostrata. ■

La presenza degli esponenti pari consente di scrivere la formula anche nella forma:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

La proprietà commutativa dell'addizione consente di scrivere la formula anche nella forma:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(y_P - y_Q)^2 + (x_P - x_Q)^2}$$

CASI PARTICOLARI

- La distanza tra l'origine O del piano cartesiano e un punto $P(x_P; y_P)$ del piano non coincidente con O è uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle coordinate di P .

Infatti, se si applica la formula della distanza tra due punti, si ha:

$$\overline{OP} = \sqrt{(x_P - x_O)^2 + (y_P - y_O)^2} = \sqrt{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$$

esempio

Calcolare la distanza tra i punti di ciascuna delle seguenti coppie:

- $P(4; 0)$ e $Q(-5; 0)$.

I punti appartengono all'asse x , per cui: $\overline{PQ} = |4 - (-5)| = 9$.

- $A(0; -4)$ e $B\left(0; +\frac{1}{2}\right)$

I punti appartengono all'asse y , per cui: $\overline{AB} = \left| -4 - \frac{1}{2} \right| = \frac{9}{2}$.

- $A\left(-1; +\frac{1}{2}\right)$ e $B\left(5; +\frac{1}{2}\right)$

I punti hanno la stessa ordinata, quindi appartengono a una retta parallela all'asse x , per cui: $\overline{AB} = |-1 - 5| = 6$.

- $F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right)$ e $R\left(-\frac{1}{2}; +\frac{1}{2}\right)$

I punti hanno la stessa ascissa, quindi appartengono a una retta parallela all'asse y , per cui: $\overline{FR} = \left| -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{7}{6}$.

- $F(-7; 6)$ e $R(-3; 3)$.

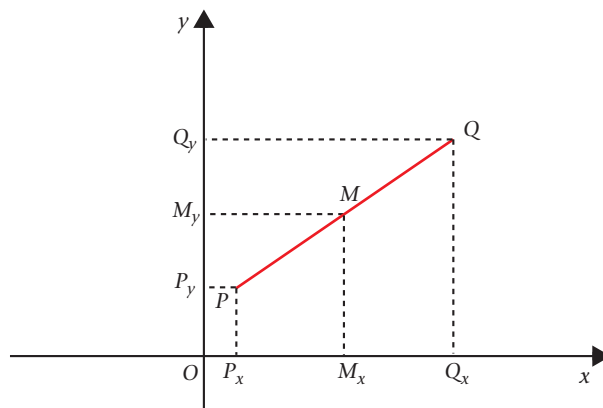
$$\overline{FR} = \sqrt{(x_F - x_R)^2 + (y_F - y_R)^2} = \sqrt{(-7 + 3)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

■ Punto medio di un segmento nel piano cartesiano

Teorema

Le coordinate del **punto medio** di un segmento del piano cartesiano sono date dalla semisomma delle coordinate omonime degli estremi.

Siano PQ un segmento del piano cartesiano e M il suo punto medio.



Ipotesi: $P(x_P; y_P)$ e $Q(x_Q; y_Q)$.

Tesi: $x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$ e $y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}$.

Dimostrazione:

Si conducano da P , M e Q le parallele agli assi.

Per un teorema sui fasci di rette parallele, se M è il punto medio del segmento PQ , allora M_x è il punto medio del segmento P_xQ_x e M_y è punto medio del segmento P_yQ_y , per cui, poiché M e M_x hanno la stessa ascissa e M e M_y la stessa ordinata, si potrà scrivere:

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_P + y_Q}{2}$$

che rappresentano le **formule delle coordinate del punto medio di un segmento**.

La tesi è quindi dimostrata. ■

La proprietà commutativa dell'addizione consente di scrivere le formule anche nella forma:

$$x_M = \frac{x_Q + x_P}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_Q + y_P}{2}$$

Dalle due formule si ricavano le formule inverse relative alle coordinate di un estremo del segmento in funzione delle coordinate dell'altro estremo e del punto medio:

$$x_Q = 2x_M - x_P \quad \text{e} \quad y_Q = 2y_M - y_P$$

$$x_P = 2x_M - x_Q \quad \text{e} \quad y_P = 2y_M - y_Q$$

CASI PARTICOLARI

- Il punto medio M di un segmento AB che congiunge due punti A e B aventi la stessa ascissa (i punti appartengono evidentemente a una retta parallela all'asse y e di equazione $x = x_A$) ha la stessa ascissa degli estremi A e B del segmento: $x_M = x_A = x_B$ e ordinata uguale alla semisomma delle ordinate degli estremi A e B :

$$M\left(x_A; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

- Il punto medio M di un segmento AB che congiunge due punti A e B aventi la stessa ordinata (i punti appartengono evidentemente a una stessa retta parallela all'asse x e di equazione $y = y_A$) ha la stessa ordinata degli estremi A e B del segmento: $y_M = y_A = y_B$ e ascissa uguale alla semisomma delle ascisse degli estremi A e B :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; y_A\right)$$

esempio

Determinare le coordinate del punto medio di ciascuno dei seguenti segmenti aventi per estremi i punti:

- $A(-1; +10)$ e $B(5; -4)$

Se si applicano le formule relative alle coordinate del punto medio di un segmento, si ottiene:

$$x_M = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad \text{e} \quad y_M = \frac{10-4}{2} = 3 \quad \text{per cui: } M(2; 3)$$

- $P(-1; +1)$ e $Q(-3; +1)$

$$x_M = \frac{-1-3}{2} = -2 \text{ e } y_M = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ per cui: } M(-2; 1)$$

- $R(-4; +4)$ e $S\left(-4; \frac{1}{2}\right)$

$$x_M = -4 \text{ perché i due estremi hanno la stessa ascissa e } y_M = \frac{4 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{9}{2}}{2} = \frac{9}{4}, \text{ per cui:}$$

$$M\left(-4; \frac{9}{4}\right).$$

- $R(4; -5)$ e $S\left(\frac{3}{2}; -5\right)$

$$x_M = \frac{4 + \frac{3}{2}}{2} = \frac{11}{4} \text{ e } y_M = -5 \text{ perché i due estremi hanno la stessa ordinata, per cui:}$$

$$M\left(\frac{11}{4}; -5\right).$$

Da una retta del piano cartesiano a un'equazione numerica intera di primo grado in due incognite

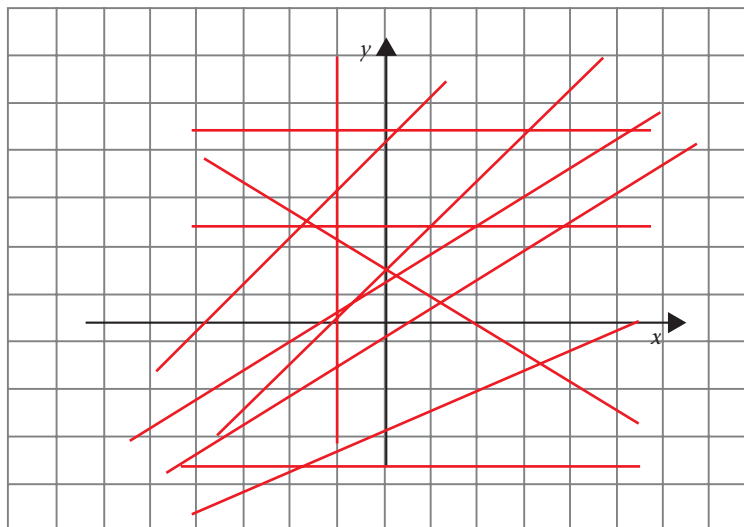
Equazione cartesiana di una retta

Punto, linea curva, retta, piano, spazio, superficie, ... , sono enti geometrici per i quali non è possibile dare la definizione. L'idea di **piano** nasce pensando a un foglio che si estende all'infinito. L'idea di **punto** è data da un granellino di sabbia o dal segno lasciato dalla punta di una matita su un foglio. L'idea di **linea curva** nasce se si lascia scorrere la punta di una matita su un foglio e la si immagina prolungarsi all'infinito da entrambe le parti.

Tra tutte le linee, c'è la **retta**, la cui idea nasce se si immagina la traccia lasciata dalla punta di una matita su un foglio, guidata da una riga e che si estende all'infinito da entrambe le sue parti.

Se si tracciano alcune rette in un piano cartesiano, intuitivamente si è in grado di classificarle in diverse tipologie: si distinguono le rette *orizzontali*, quelle *verticali*, quelle *oblique* come nella figura a pagina seguente. Osservando la figura, si è anche in grado di percepire intuitivamente che tutte le rette *orizzontali*, per esempio, sono accomunate dalla caratteristica di avere la stessa *direzione*. Allo stesso modo, tutte le rette *verticali* o tutte le rette *oblique* tra loro parallele sono, rispettivamente, accomunate dalla stessa caratteristica.

La **direzione** di una retta qualsiasi r non è definibile, ma si può pensare come la caratteristica che accomuna r a tutte le rette a essa parallele.



Nel piano cartesiano, si dice che due o più rette oblique hanno la stessa direzione se risultano *inclinate allo stesso modo*, per esempio, sul semiasse positivo dell'asse x , quindi se formano angoli corrispondenti congruenti con tale semiasse.

Confrontando due rette tra loro non parallele, né parallele ad alcun asse cartesiano, si deduce che i punti dell'una soddisfano una certa proprietà non soddisfatta da alcun punto dell'altra, fatta eccezione per gli eventuali punti in comune (un solo punto, se le rette si intersecano; infiniti, se le rette sono sovrapposte). È quindi lecito pensare a una certa retta come a un insieme infinito di tutti e soli i punti del piano accomunati da una caratteristica comune ovvero dal soddisfare, tutti, una certa proprietà.

Poiché un punto qualsiasi del piano cartesiano è esprimibile mediante le coordinate generiche $(x; y)$, si deduce che una retta può essere rappresentata analiticamente da un'espressione nelle variabili x e y che esprime in simboli tale proprietà. Tale espressione prende il nome di **equazione cartesiana della retta** o semplicemente **equazione della retta**. Essa esprime contemporaneamente anche il legame tra l'ascissa e l'ordinata di uno qualsiasi degli infiniti punti della retta.

DEFINIZIONE

L'**equazione cartesiana** di una retta è una relazione algebrica che esprime il legame sussistente tra le coordinate di un suo qualsiasi punto.

Dalla definizione si deduce che, data l'equazione di una retta r , se si sostituiscono le coordinate di un qualsiasi punto di r alle variabili x e y contenute nell'equazione di r , l'equazione si trasforma in identità.

CASI PARTICOLARI

- L'equazione dell'asse x è $y = 0$, infatti l'asse x è l'insieme dei punti del piano aventi ordinata nulla.
- L'equazione dell'asse y è $x = 0$, infatti l'asse y è l'insieme dei punti del piano aventi ascissa nulla.
- Una retta parallela all'asse x è costituita da punti aventi (tutti) la stessa ordinata. Se k è tale ordinata, l'equazione assume la forma: $y = k$, con $k \in \mathbb{R}$.
- Una retta parallela all'asse y è costituita da punti aventi (tutti) la stessa ascissa. Se h è tale ascissa, l'equazione assume la forma: $x = h$, con $h \in \mathbb{R}$.

esempio

- $y = 3x$ è l'equazione cartesiana della retta i cui punti hanno ordinata tripla dell'ascissa.
- $y = 3x + 1$ è l'equazione cartesiana della retta i cui punti hanno l'ordinata uguale al successivo del triplo dell'ascissa.

È possibile dimostrare che l'equazione di una retta passante per l'origine assume la forma:
 $y = mx$.

m prende il nome di **coefficiente angolare** o **coefficiente direttivo** della retta ed è legato all'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

$y = mx$ prende il nome di **forma esplicita** dell'equazione.

CASI PARTICOLARI

- L'asse x ha coefficiente angolare 0.
- Il coefficiente angolare dell'asse y non è definito, infatti $\frac{y}{x} = m$ perde significato se $x = 0$.
- Tutte le rette parallele all'asse y hanno la stessa direzione e, per esse, il coefficiente angolare non è definito.

Le bisettrici dei quadranti sono rette passanti per l'origine. In particolare:

- la bisettrice del primo e del terzo quadrante ha equazione $y = x$ perché è costituita da punti aventi ascissa e ordinata uguali e il suo coefficiente angolare m è uguale a 1;
- la bisettrice del secondo e del quarto quadrante ha equazione $y = -x$ perché costituita da punti aventi ascissa e ordinata opposte e il suo coefficiente angolare m è uguale a -1 .

esempio

- $r: y = 3x$, $s: y = -4x$, $t: y = -\frac{1}{2}x$, $p: 2x - y = 0$, $q: 14x = 6y$ sono equazioni di rette passanti per l'origine del piano cartesiano e aventi, rispettivamente, i seguenti coefficienti angolari:

$$m_r = 3, m_s = -4, m_t = -\frac{1}{2}, m_p = 2, m_q = \frac{7}{3}$$

(le equazioni delle rette p e q si possono ricondurre alla forma $y = mx$:

$$p: y = 2x, q: y = \frac{7}{3}x).$$

È possibile dimostrare che una retta generica del piano cartesiano, non passante per l'origine O e non parallela ad alcun asse, è rappresentata da un'equazione di primo grado della forma $ax + by + c = 0$, detta **forma implicita dell'equazione**, o della forma $y = mx + q$, detta, **forma esplicita dell'equazione** (che si ottiene ricavando l'espressione di y dall'equazione $ax + by + c = 0$ nell'ipotesi che $b \neq 0$, e ponendo: $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$).

Il coefficiente $m = -\frac{a}{b}$ è il **coefficiente angolare della retta** ed è legato all'angolo che la retta forma con la direzione positiva dell'asse delle ascisse.

Si domanda allo studente di verificare che i seguenti casi particolari:

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| • $a = 0, b \neq 0, c = 0$ | • $a \neq 0, b = 0, c = 0$ | • $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$ |
| • $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$ | • $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ | • $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ |

portano a uno dei casi precedentemente esaminati.

- $r: y = 3x + 1$, $s: y = -4x - 2$, $p: 2x - y + 4 = 0$ sono equazioni di rette generiche del piano cartesiano e aventi, rispettivamente, i seguenti coefficienti angolari: $m_r = 3$, $m_s = -4$, $m_p = 2$.
Le prime due equazioni sono scritte in forma esplicita; la terza in forma implicita.
- Il modello matematico della frase: *trova due numeri tali che la differenza del triplo del primo con il secondo sia uguale a 2* è l'equazione $3x - y = 2$. Essa è verificata da infinite coppie di numeri: $x = 1$ e $y = 1$, $x = 0$ e $y = -2$, $x = 5$ e $y = 13$, e così via ... L'individuazione delle coppie soluzioni dell'equazione non ha mai termine. $3x - y = 2$ rappresenta infatti una retta del piano cartesiano quindi un insieme di infiniti punti, alcuni dei quali hanno coordinate $(1; 1)$, $(0; -2)$, $(5; 13)$,

Equazioni come funzioni

Funzioni

È noto che una relazione definita tra due insiemi A e B è una funzione definita da A a B se a ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B .

In simboli, per indicare che: f è una funzione definita da A a B o f va da A a B , si scrive: $f: A \mapsto B$.

Se x è un elemento di A e y è l'elemento di B associato a x dalla funzione f , si scrive: $y = f(x)$ e si legge: y è uguale a f di x o y è funzione di x o y è l'immagine di x .

Se si scrive: $f: x \mapsto y$, si legge: f è una funzione che a x associa y , oppure a x corrisponde y mediante f , oppure y è associato a x da f .

Se y è l'immagine di x mediante la funzione f , allora x prende il nome di controimmagine di y .

L'insieme A prende il nome di **dominio** della funzione f mentre l'insieme di tutte le immagini degli elementi x del dominio A si indica con $f(A)$ e prende il nome di **codominio** della funzione f . Gli elementi di $f(A)$ hanno quindi almeno una controimmagine in A . $f(A)$ è un sottoinsieme di B : $f(A) \subseteq B$.

Se una funzione $f: A \mapsto B$ è tale che ogni elemento di B possiede una e una sola controimmagine in A , allora f prende il nome di **funzione biunivoca** e, in tal caso, il codominio $f(A)$ coincide con l'insieme B .

Se una funzione è biunivoca è possibile definire la sua funzione inversa (si dice che f è invertibile): $f^{-1}: B \mapsto A$ che associa a ogni elemento $y \in B$ la sua controimmagine $x \in A$.

È facile intuire che in f e in f^{-1} , i ruoli di dominio e codominio si invertono: A è il dominio di f e il codominio di f^{-1} ; analogamente, B è il codominio di f e il dominio di f^{-1} .

Funzione reale di variabile reale

Sia D un sottoinsieme dell'insieme R dei numeri reali: $D \subseteq R$.

DEFINIZIONE

Si dice che sull'insieme D è definita una **funzione reale di variabile reale** f se a ciascun elemento (numero) appartenente a D è associato uno e un solo numero reale y appartenente a R .

In simboli, se si scrive: $f: D \rightarrow R$, si legge: f è una funzione definita da D a R o f va da D a R . x è un qualsiasi elemento di D , mentre y è l'elemento di $f(D)$ associato a x , quindi y dipende da x . Per questo motivo, y rappresenta la **variabile dipendente** della funzione f poiché il valore di $y = f(x)$ **dipende** dal valore attribuito a x ; x è la **variabile indipendente**.

L'insieme D prende il nome di **dominio** della funzione reale f ed è costituito da tutti i numeri reali attribuibili alla variabile x affinché esista e sia reale y .

L'insieme di tutte le immagini degli elementi x del dominio D si indica con $f(D)$ e prende il nome di **codominio** della funzione f . Gli elementi di $f(D)$ sono i numeri reali aventi almeno una controimmagine in D . $f(D)$ è un sottoinsieme di R : $f(D) \subseteq R$.

Ogni funzione reale è individuata univocamente da un'espressione algebrica $y = f(x)$, dove $x \in D$ e $y \in f(D)$ sono variabili, che prende il nome di **equazione della funzione f** .

I valori assunti da y si ottengono sostituendo a x , nell'espressione algebrica $y = f(x)$ che caratterizza la funzione, i valori contenuti nel dominio D .

esempio

Data la funzione di equazione $f(x) = 4x + 5$, la seguente tabella illustra i valori assunti da $y = f(x)$ al variare di x nel dominio $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x) = 4x + 5$	$4 \cdot 0 + 5 = 5$	$4 \cdot 1 + 5 = 9$	13	17	21	25

■ Funzione affine

La funzione avente per dominio R che a un numero x associa il numero $mx + q$ ha equazione $f(x) = mx + q$, con $m, q \in R$, e assume il nome particolare di **funzione affine**.

DEFINIZIONE

La funzione di equazione $f(x) = mx + q$, di dominio $D = R$ e con $m, q \in R$, prende il nome di **funzione affine**.

CASI PARTICOLARI

- Se $m \neq 0$ e $q = 0$, l'equazione della funzione affine diventa $f(x) = mx$. La funzione di equazione $f(x) = mx$ prende il nome di **funzione lineare**.
- Se $f(x) = mx \ \forall x \in R$, allora al crescere (o al decrescere) di x , cresce (o decresce) allo stesso modo anche $y = f(x)$. Per tale motivo, la funzione lineare è anche detta **funzione di proporzionalità diretta** di coefficiente di proporzionalità m .
- Se $m = 0$ e $q \neq 0$, l'equazione della funzione affine diventa $f(x) = q$. La funzione di equazione $f(x) = q$ prende il nome di **funzione costante**.

esempio

- La velocità v di un corpo che si muove di moto rettilineo uniforme percorrendo uno spostamento s nel tempo t è costante: $\frac{s}{t} = v \Rightarrow s = t \cdot v$.

Al crescere del tempo, cresce allo stesso modo lo spostamento (raddoppiando il tempo, raddoppia lo spostamento; triplicando il tempo, triplica lo spostamento; ...) quindi $s = t \cdot v$ è una funzione di proporzionalità diretta.

- $y = 3x$ è una funzione di proporzionalità diretta.

La seguente tabella illustra i valori assunti da y al variare di x nell'insieme $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$:

x	0	1	2	3	4	5	6	8	9
y	0	3	6	9	12	15	18	24	27

Dalla tabella si evince facilmente che, raddoppiando x anche y raddoppia; triplicando x , anche y triplica;

■ Rappresentazione grafica di una funzione

Il V postulato di Euclide asserisce che per due punti distinti passa una e una sola retta per cui, per tracciare il grafico di una retta nel piano cartesiano, conoscendo la sua equazione, è necessario individuare due punti diversi della retta.

Funzione affine

Si supponga che l'equazione di una retta r sia: $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}_0$.

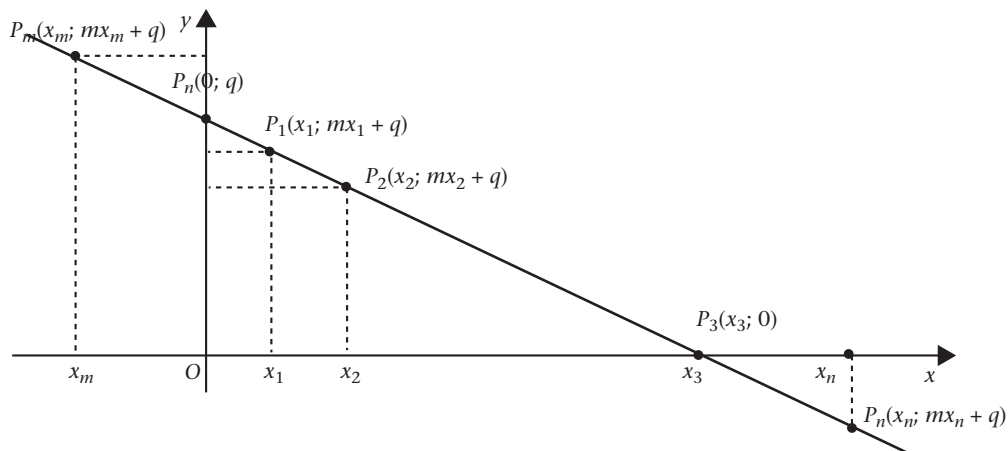
Se si isola y in un membro, al fine di ricavare l'equazione esplicita della retta r , in virtù di tutte le considerazioni compiute nei paragrafi precedenti, è facile intuire che la rappresentazione grafica di una funzione affine, che a ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ associa $mx + q \in \mathbb{R}$, $x \mapsto mx + q$, è la retta del piano cartesiano di equazione $y = mx + q$, di coefficiente angolare m ed è l'insieme di tutti i punti del piano di coordinate $(x; f(x))$ ovvero $(x; mx + q)$. Per individuare due coppie di numeri che si corrispondono mediante una funzione affine, è necessario:

- attribuire due valori arbitrari alla variabile indipendente x : x_1 e x_2 ;
- ricavare le immagini corrispondenti ($f(x_1) = mx_1 + q$, $f(x_2) = mx_2 + q$), in modo da ottenere le coordinate di due punti della retta: $P_1(x_1; mx_1 + q)$ e $P_2(x_2; mx_2 + q)$;
- rappresentare P_1 e P_2 nel piano cartesiano;
- tracciare la retta congiungente P_1 e P_2 .

La retta a cui appartiene il segmento P_1P_2 è dunque quella cercata.

Ogni altro punto della retta di equazione $y = mx + q$, quindi ogni altra coppia di valori che si corrispondono mediante una funzione affine di equazione $y = mx + q$, può essere individuato attribuendo valori arbitrari alla x e ricavando i valori corrispondenti di y secondo la funzione affine definita dalla corrispondenza: $x \mapsto mx + q$.

Per tutte le considerazioni vale anche il viceversa.



La rappresentazione grafica della funzione affine è dunque la retta di equazione $y = mx + q$ di coefficiente angolare m .

esempio

- Rappresentare nel piano cartesiano la retta r di equazione: $6x - 2y + 7 = 0$.

Per rappresentare nel piano cartesiano la retta assegnata, è necessario:

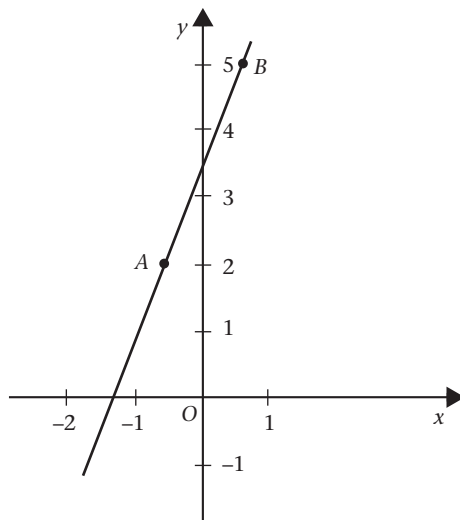
- rendere esplicita l'equazione: $y = 3x + \frac{7}{2}$, in modo da ottenere l'equazione della funzione affine corrispondente;
- attribuire due valori arbitrari alla variabile x e ricavare i valori corrispondenti di y :

x	y
$-\frac{1}{2}$	$3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{7}{2} = 2$
$\frac{1}{2}$	$3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

- rappresentare i punti $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ e $B\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ nel piano cartesiano;
- congiungere i due punti.

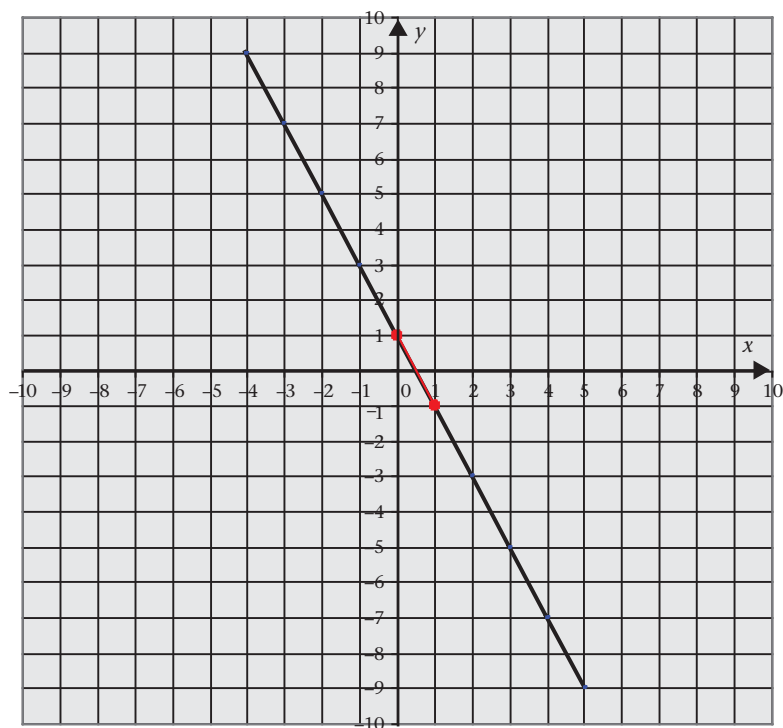
La retta a cui appartiene il segmento congiungente A e B è dunque la retta cercata.

La rappresentazione grafica della retta di equazione $6x - 2y + 7 = 0$ è quindi la seguente:



- Per rappresentare graficamente la funzione di equazione $f(x) = -2x + 1$, è necessario compilare la seguente tabella, al fine di individuare due punti della retta di equazione $y = -2x + 1$ e tracciare poi in un piano cartesiano la retta che li congiunge:

x	y
0	1
1	-1



Funzione lineare

Si supponga che l'equazione di una retta r sia: $ax + by = 0$, con $a, b \in \mathbb{R}_0$.

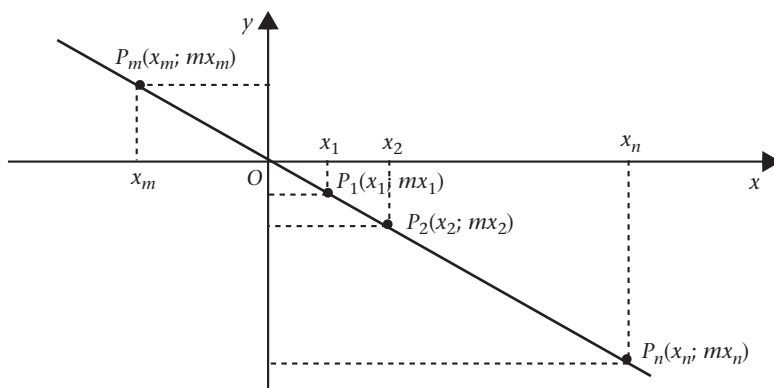
Se si isola y in un membro, al fine di ricavare l'equazione esplicita della retta r , in virtù di tutte le considerazioni compiute nei paragrafi precedenti, è facile intuire che la rappresentazione grafica di una funzione lineare, che a ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ associa $mx \in \mathbb{R}$: $x \mapsto mx$, è una retta passante per l'origine del piano cartesiano, di equazione $y = mx$ e di coefficiente angolare m . Essa è l'insieme dei punti del piano di coordinate $(x; f(x))$ ossia $(x; mx)$.

Le coordinate di due punti di r possono essere individuate cercando due coppie di numeri che si corrispondono mediante una funzione lineare ovvero due numeri proporzionali secondo m : $x_1 \mapsto y_1 = f(x_1) = mx_1$ e $x_2 \mapsto y_2 = f(x_2) = mx_2$.

Uno dei due punti di r è l'origine; un altro punto resta facilmente determinato se si tiene conto che la sua ordinata è proporzionale alla sua ascissa secondo m .

La retta a cui appartiene il segmento che congiunge i due punti è dunque la retta cercata.

Ogni altro punto della retta di equazione $y = mx$, può essere individuato attribuendo valori arbitrari alla x e ricavando i valori corrispondenti di y .



Per tutte le considerazioni vale anche il viceversa.

La rappresentazione grafica della funzione di proporzionalità diretta è dunque la retta di equazione $y = mx$ che passa per l'origine del piano cartesiano e ha coefficiente angolare m .

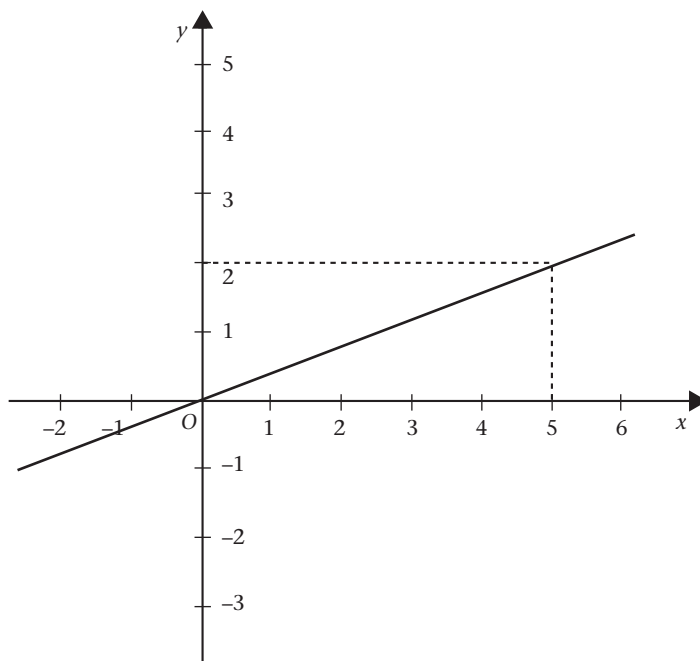
esempio

- Rappresentare nel piano cartesiano la retta r di equazione: $2x - 5y = 0$.
Per rappresentare r nel piano cartesiano, è necessario:
 - rendere esplicita l'equazione: $y = \frac{2}{5}x$, in modo da ottenere l'equazione della funzione lineare corrispondente;
 - attribuire un valore arbitrario alla variabile x e ricavare il valore corrispondente di y (è sufficiente cercare una solo punto dato che la retta passa per l'origine $O(0; 0)$):

x	y
5	$\frac{2}{5} \cdot 5 = 2$

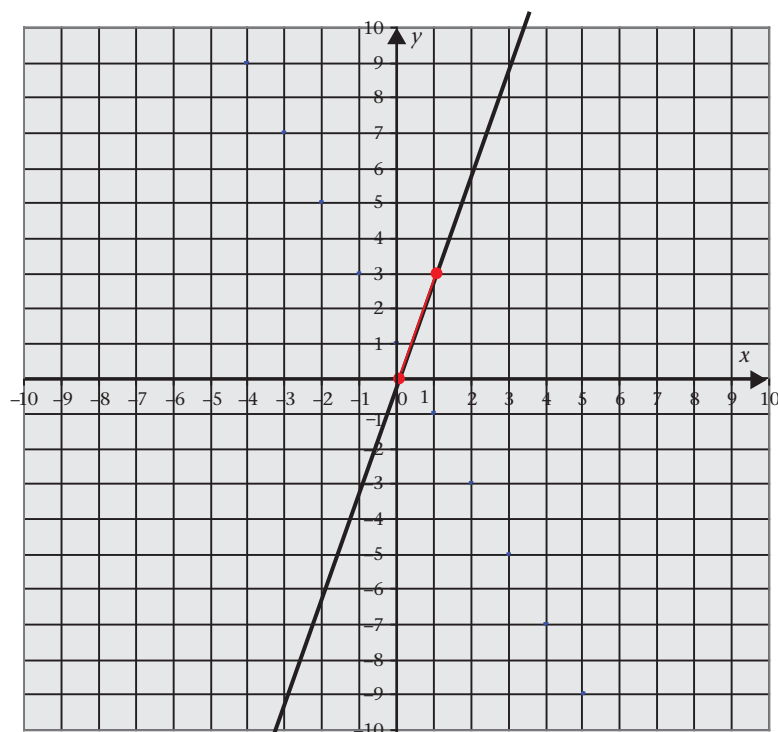
- rappresentare i punti $O(0; 0)$ e $A(5; 2)$ nel piano cartesiano;
- tracciare la retta passante per i due punti.

La retta a cui appartiene il segmento congiungente O con A è dunque la retta cercata. La rappresentazione grafica della retta di equazione $2x - 5y = 0$ è quindi la seguente:



- Rappresentare graficamente la funzione di proporzionalità diretta di equazione $y = 3x$ (quindi la retta avente equazione $y = 3x$).

Se si prendono in considerazione due punti qualsiasi, per esempio $(0; 0)$ e $(1; 3)$, si rappresentano in un piano cartesiano e si traccia la linea che li congiunge, si ottiene la rappresentazione grafica cercata.



Funzione costante

Caso 1 – Si supponga che l'equazione di una retta r sia: $by + c = 0$.

Se si isola y in un membro, al fine di ricavare l'equazione esplicita della retta r , in virtù di tutte le considerazioni compiute nei paragrafi precedenti, è facile intuire che la rappresentazione grafica di una funzione costante, che a ogni elemento $x \in \mathbb{R}$ associa $y = -\frac{c}{b} \in \mathbb{R}$, è

la retta del piano cartesiano di equazione $y = q$, con $-\frac{c}{b} = q$, parallela all'asse x .

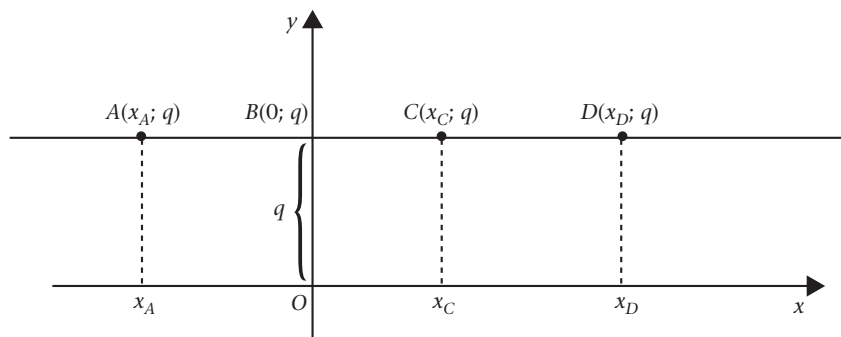
Essa è l'insieme di tutti i punti del piano di coordinate $(x; f(x))$ ossia $(x; q)$.

Se si prende in considerazione l'equazione della funzione costante corrispondente alla retta, si deduce che il grafico di una funzione costante della forma $y = q$ è una retta parallela all'asse delle ascisse.

Cercare le coordinate di due punti della retta significa individuare due coppie di numeri x e y che si corrispondono mediante la funzione costante: $x_1 \mapsto y_1 = q$ e $x_2 \mapsto y_2 = q$, ma per tracciare il grafico di r è sufficiente individuare un solo punto, per esempio il punto $P(0; q)$ dell'asse y (avente ascissa nulla e ordinata q) e tracciare la retta passante per P e parallela all'asse x .

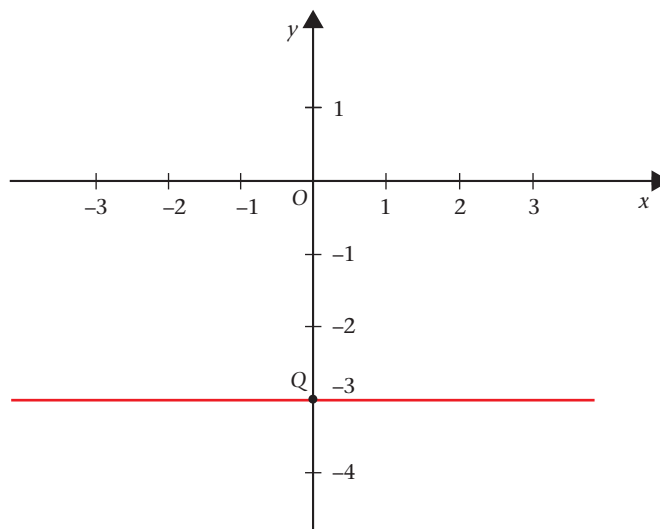
Ogni altro punto della retta di equazione $y = q$, quindi ogni altra coppia di punti che si corrispondono mediante la funzione costante di equazione $y = q$, può essere individuato tenendo fisso il valore $y = q$ e attribuendo valori arbitrari alla x .

Per tutte le considerazioni vale anche il viceversa.

**esempio**

Rappresentare nel piano cartesiano la retta di equazione: $y = -3$.

$y = -3$ è l'equazione di una retta parallela all'asse x (nonché quella di una funzione costante). Individuato sull'asse y il punto Q di ordinata -3 , la rappresentazione grafica si ottiene tracciando una retta (orizzontale) parallela all'asse x e passante per Q .



Caso 2 – Si supponga che l'equazione di una retta r sia $x = -\frac{c}{a}$ ovvero, ponendo $-\frac{c}{a} = h$, della forma: $x = h$.

Cercare le coordinate di due punti della retta di equazione $x = h$ significa individuare due coppie di numeri x e y in cui il valore di x è fisso ($x = h$) mentre il valore di y varia, quindi aventi coordinate della forma: (h, y_1) e (h, y_2) .

È noto che a un'equazione della forma $x = h$ corrisponde una retta parallela all'asse y .

Per tracciare il suo grafico è quindi sufficiente individuare un solo punto, per esempio il

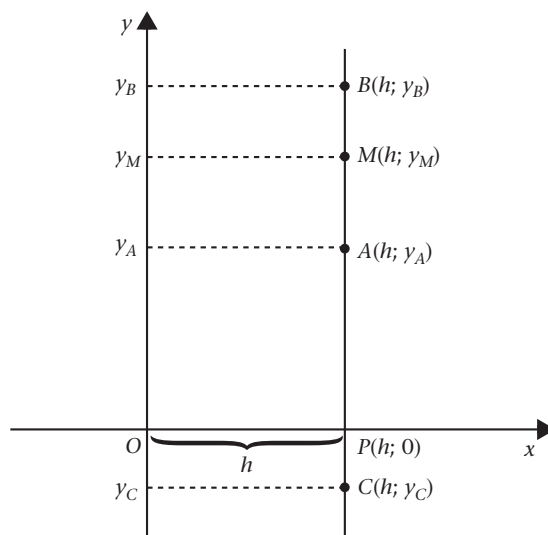
punto $\left(-\frac{c}{a}; 0\right)$ dell'asse x avente ascissa $h = -\frac{c}{a}$ e ordinata nulla, e tracciare la retta pas-

sante per esso e parallela all'asse y .

Ogni altro punto della retta di equazione $x = h$, può essere individuato tenendo fisso il valore

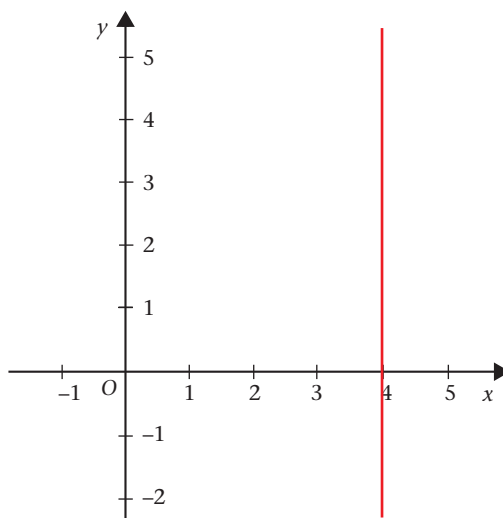
$x = -\frac{c}{a}$ e attribuendo valori arbitrari alla y .

Per tutte le considerazioni vale anche il viceversa.

**esempio**

Rappresentare nel piano cartesiano la retta di equazione: $x = 4$.

$x = 4$ è l'equazione di una retta parallela all'asse y , per cui, individuato sull'asse x il punto P di ascissa 4, è sufficiente tracciare una retta (verticale) parallela all'asse y e passante per P .

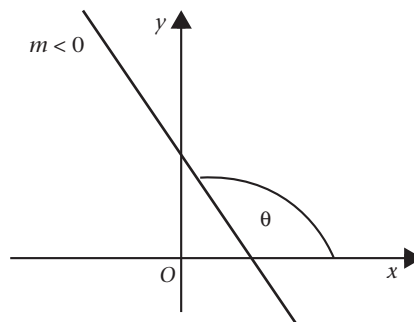
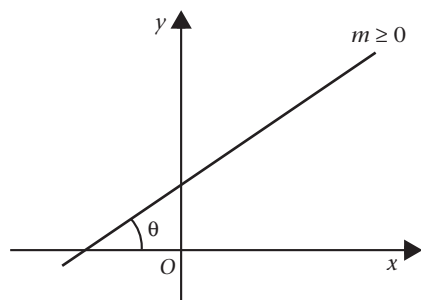


■ Il segno del coefficiente angolare

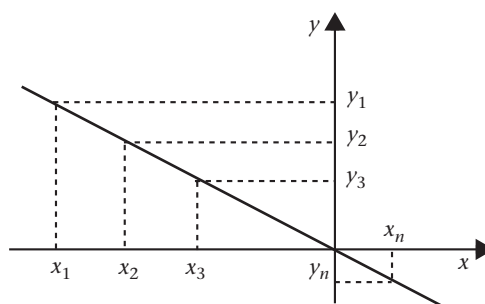
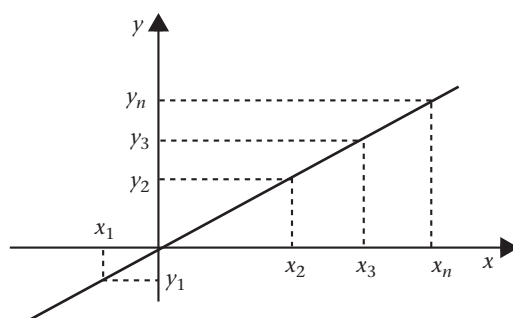
È noto che il coefficiente angolare m di una retta r di equazione $y = mx + q$ è legato alla direzione della retta r e quindi all'inclinazione di r sulla direzione positiva dell'asse delle ascisse.

In particolare:

- se θ è l'ampiezza dell'angolo che la retta forma col semiasse positivo delle ascisse, risulta che, al crescere di m , aumenta anche l'ampiezza di θ ;
- se θ è acuto, allora $m \geq 0$; altrimenti $m < 0$;
- se θ è un angolo retto o un suo multiplo, il coefficiente angolare non è definito.

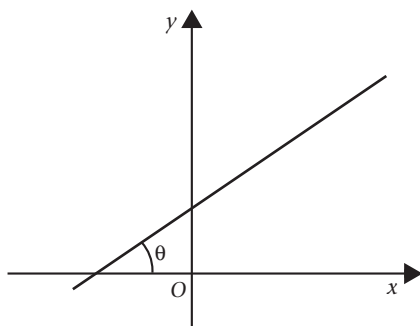


Si esaminino le seguenti due figure che raffigurano due rette oblique r ed r' qualsiasi passanti per l'origine e di equazioni, rispettivamente: $y = m_1x$ e $y = m_2x$.

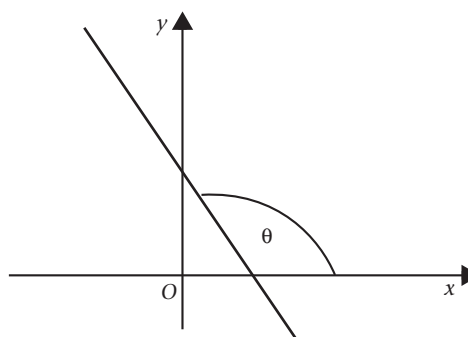


La prima possiede coefficiente angolare positivo e giace nel primo e nel terzo quadrante; la seconda, invece, possiede coefficiente angolare negativo e giace nel secondo e nel quarto quadrante.

Si esaminino le seguenti due figure che raffigurano due rette oblique r ed r' qualsiasi di equazioni, rispettivamente: $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$.



$$r: y = m_1x + q_1 \text{ e } m_1 > 0$$



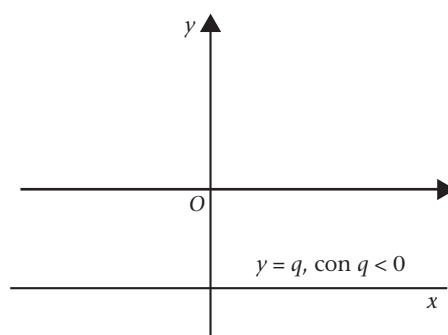
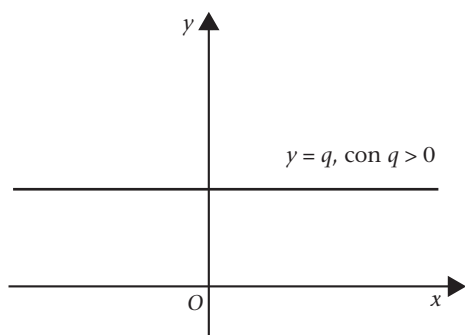
$$r': y = m_2x + q_2 \text{ e } m_2 < 0$$

È semplice constatare che le due funzioni affini, aventi equazioni della forma $y = mx + q$ e corrispondenti alle due rette, sono:

- **crescenti** se $m > 0$, nel senso che, al crescere di x , cresce anche la y :
se $\dots < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, allora $\dots < y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_n$
- **decrescenti** se $m < 0$, nel senso che, al crescere di x , decresce la y :
se $\dots < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$, allora $\dots > y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_n$

Si esaminino ora le seguenti due figure che raffigurano due rette parallele all'asse x , quindi di coefficiente angolare nullo.

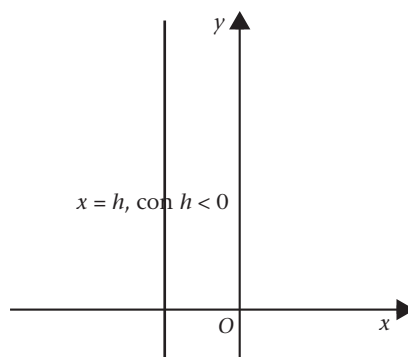
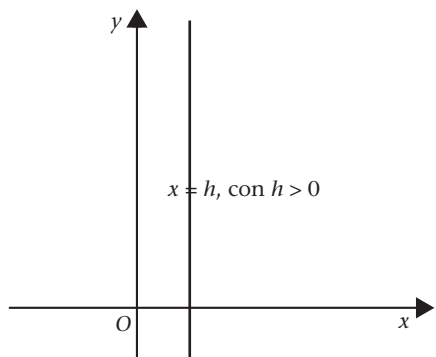
Tali rette giacciono nel primo e nel secondo quadrante se $q > 0$, nel terzo e nel quarto se $q < 0$.



Le funzioni aventi equazioni della forma $y = q$ e corrispondenti alle due rette sono **costanti** nel senso che, al crescere di x , la y si mantiene costante:

$$\text{se } m = 0 \text{ e se } \dots < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n \text{ allora } \dots = y_1 = y_2 = y_3 = \dots = y_n$$

Per analogia, le funzioni aventi equazioni della forma $x = h$, di coefficiente angolare non definito, giacciono nel primo e nel quarto quadrante se $h > 0$; nel secondo e nel terzo se $h < 0$.



Per tutte le considerazioni vale anche il viceversa.

■ Funzioni a tratti

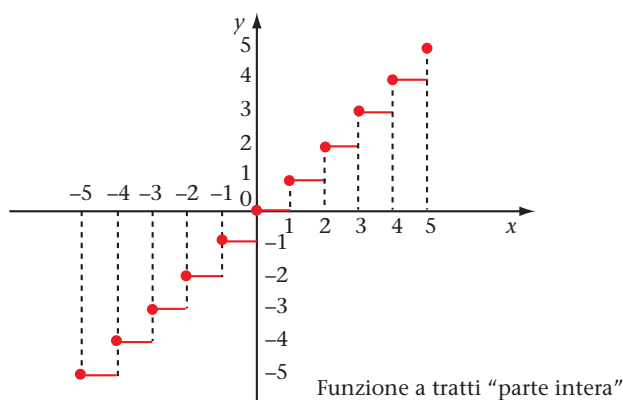
Le funzioni a tratti sono definite mediante espressioni diverse su sottoinsiemi diversi del dominio. La precisazione “a tratti” è legata alla rappresentazione grafica nel piano cartesiano che si realizza, infatti, mediante “tratti”, anche non continui.

Funzione parte intera

Si prenda in considerazione la **funzione parte intera** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ è intero} \\ \text{al più grande intero relativo minore di } x, & \text{se } x \text{ non è intero} \end{cases}$$

La funzione *parte intera* è una funzione a tratti, infatti il suo grafico è formato da tanti segmenti appartenenti a rette parallele all'asse delle ascisse, ciascuno di lunghezza 1, a ciascuno dei quali non appartiene ciascun estremo destro (infatti, se per esempio, $-3 \leq x < -2$ è $y = -3$, ma per $x = -2$ è $y = -2$).

**esempio**

Si prenda in considerazione la funzione $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ così definita:

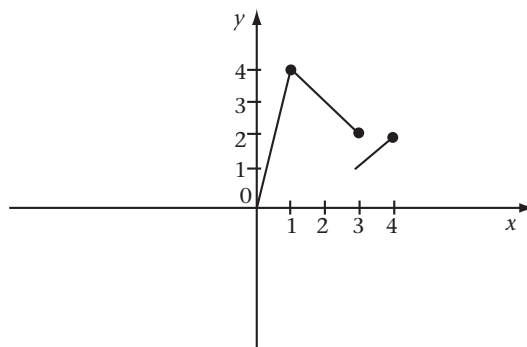
$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 5 - x & \text{se } 1 < x \leq 3 \\ x - 2 & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è l'insieme: $[0, 4]$.

Dalla definizione della funzione assegnata, si deduce che il suo codominio è l'insieme: $[0, 4]$.

Il grafico della funzione è formato:

- in $[0, 1]$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = 4x$;
- in $(1, 3]$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = 5 - x$;
- in $(3, 4]$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = x - 2$.

**La funzione modulo**

È noto cosa si intende per valore assoluto o modulo di un numero intero relativo p :

$$|p| = \begin{cases} p & \text{se } p > 0 \\ -p & \text{se } p < 0 \\ 0 & \text{se } p = 0 \end{cases}$$

Il modulo di un numero reale p è quindi uguale a p se p è positivo, a $-p$ se p è negativo, nullo se p è nullo.

Nella rappresentazione dei numeri sulla retta reale, il modulo di p rappresenta la distanza tra l'origine e il punto associato a p sulla retta reale.

Si prenda ora in esame la **funzione modulo**, di equazione: $f(x) = |x|$ e così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione modulo di un numero reale x lascia quindi invariato il segno del numero x se x è positivo, cambia segno a x se x è negativo, attribuisce a x il valore nullo se x è nullo.

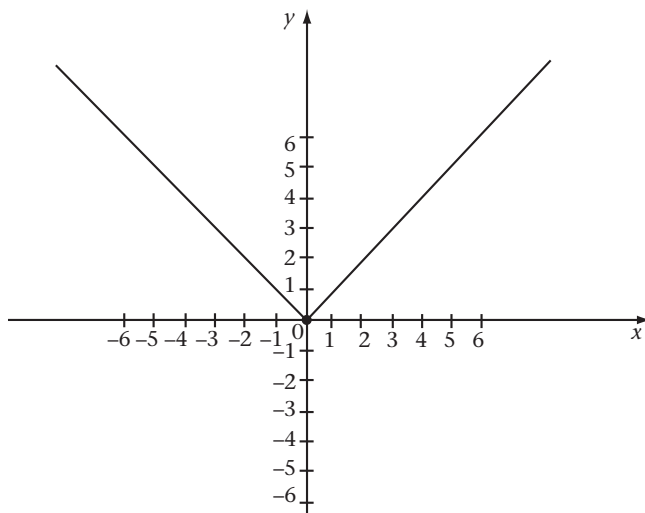
Il suo dominio è l'insieme R dei numeri reali: $D = R$.

Per definizione, poiché il modulo di un numero è nullo o positivo, si deduce che il codominio della funzione modulo è costituito dai numeri reali non negativi:

$$f(D) = \{x \in R: x \geq 0\} = [0, +\infty)$$

La funzione modulo è una funzione a tratti, infatti il suo grafico è dato:

- in $[0, +\infty)$, dal tratto della bisettrice del primo e terzo quadrante, di equazione $y = x$ e appartenente al primo quadrante;
- in $(-\infty, 0)$, dal tratto della bisettrice del secondo e quarto quadrante, di equazione $y = -x$ e appartenente al secondo quadrante.



esempio

- Tracciare il grafico della funzione di equazione $f(x) = |x + 1|$.

Per definizione si ha:

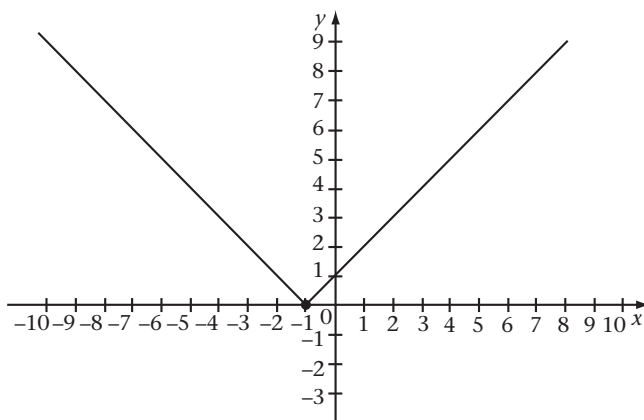
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x+1 \geq 0 \\ -x-1 & \text{se } x+1 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

Il dominio è l'insieme R dei numeri reali: $D = R$.

Poiché il modulo di un numero è nullo o positivo, si deduce che il codominio della funzione assegnata è costituito dai numeri reali non negativi: $f(D) = \{x \in R: x \geq 0\} = [0, +\infty)$.

La funzione è a tratti, infatti la sua rappresentazione grafica è data:

- in $[-1, +\infty)$, dal tratto della retta di equazione $y = x + 1$ e appartenente al semipiano positivo dell'asse y ;
- in $(-\infty, -1)$, dal tratto della retta di equazione $y = -x - 1$ e appartenente al semipiano positivo dell'asse y .



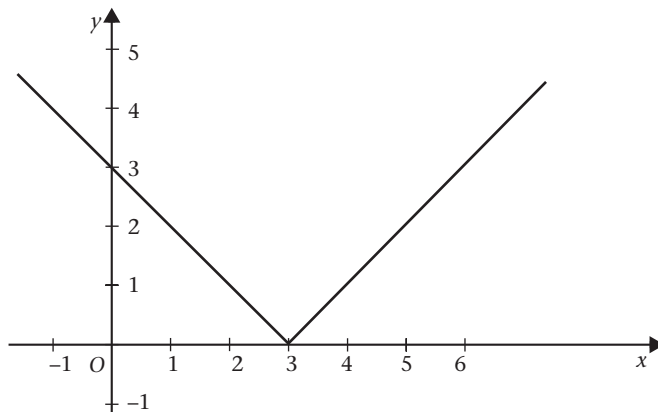
- Tracciare il grafico della funzione di equazione: $f(x) = |x - 3|$.

Tenendo conto di quanto già studiato riguardo alla funzione modulo, la funzione di equazione: $f(x) = |x - 3|$ è così definita:

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x - 3 \geq 0 \\ -x + 3 & \text{se } x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } x \geq 3 \\ -x + 3 & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

Il grafico della funzione di equazione $f(x) = |x - 3|$ è quindi dato:

- dal tratto del grafico della retta di equazione $y = x - 3$ appartenente al semipiano positivo dell'asse y e corrispondente alle x appartenenti all'insieme $[3, +\infty)$;
- dal tratto del grafico della retta di equazione $y = -x + 3$ e corrispondente alle x appartenenti all'insieme $(-\infty, -3]$.



La funzione segno

Si prenda in esame la **funzione segno**, detta anche **funzione signum**, così definita:

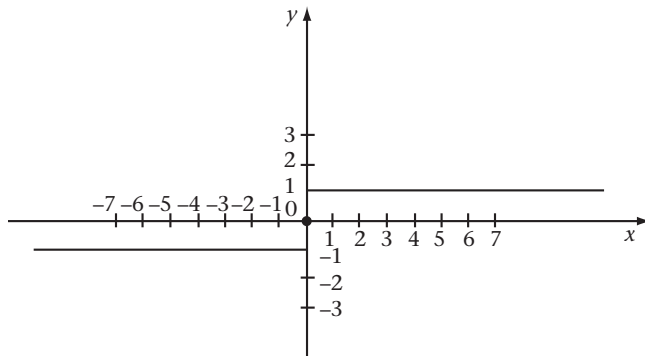
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Il suo dominio è l'insieme R dei numeri reali: $D = R$.

Dalla definizione si deduce che il codominio della funzione modulo è costituito dai numeri reali $-1, 0$ e 1 per cui: $f(D) = \{-1, 0, 1\}$.

La funzione segno è una funzione a tratti, infatti la sua rappresentazione grafica è data:

- dal tratto, appartenente al primo quadrante, della retta passante per il punto $(0; 1)$ e parallela all'asse x ;
- dal punto origine del piano cartesiano;
- dal tratto, appartenente al terzo quadrante, della retta passante per il punto $(0; -1)$ e parallela all'asse x .



■ Rette parallele e rette perpendicolari

È noto che due o più rette oblique di un piano cartesiano hanno la stessa direzione se risultano *inclinate allo stesso modo*, per esempio, sul semiasse positivo dell'asse x , quindi se formano angoli corrispondenti congruenti con tale semiasse. Di conseguenza, i coefficienti angolari di due rette parallele, essendo legati agli angoli che le due rette formano con il semiasse positivo delle ascisse, sono uguali.

È possibile dimostrare che i coefficienti angolari di due rette perpendicolari sono l'uno l'opposto del reciproco dell'altro quindi il loro prodotto è uguale a -1 (per la dimostrazione, si prendano in considerazione: due rette r e s tra loro perpendicolari, le rette r' ed s' passanti per l'origine e parallele, rispettivamente, a r e a s , il punto P di r' avente ascissa 1, il punto P' di s' avente ascissa 1 e si applichi il teorema di Pitagora al triangolo OPP').

CASI PARTICOLARI

- È noto dalla geometria euclidea che rette tra loro distinte e parallele alla stessa retta sono tra loro parallele e rette tra loro distinte e perpendicolari alla stessa retta sono tra loro parallele.

Ne consegue che:

- tutte le rette tra loro distinte e ciascuna parallela all'asse x sono tra loro parallele;
- tutte le rette tra loro distinte e ciascuna parallela all'asse y sono tra loro parallele;
- tutte le rette tra loro distinte e ciascuna perpendicolare all'asse x sono tra loro parallele e tutte parallele all'asse y ;
- tutte le rette tra loro distinte e ciascuna perpendicolare all'asse y sono tra loro parallele e tutte parallele all'asse x .
- Le bisettrici dei quadranti sono rette tra loro perpendicolari. La bisettrice del primo e del terzo quadrante, di equazione $y = x$, possiede coefficiente angolare m uguale a 1; la bisettrice del secondo e del quarto quadrante, di equazione $y = -x$, possiede coefficiente angolare m' uguale a -1 . Il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1 .

esempio

- Stabilire se le seguenti sono coppie di rette parallele:

$$a: x + 2y = 0 \text{ e } b: y = -\frac{1}{2}x + 5; \quad r: 2x + y + 4 = 0 \text{ e } s: y = \frac{1}{2}x$$

Le rette a e b sono parallele perché $m_a = m_b = -\frac{1}{2}$.

Le rette r e s non sono parallele perché $m_r = -2 \neq m_s = \frac{1}{2}$.

- Stabilire se le seguenti sono coppie di rette perpendicolari:

$$a: 2x + y = 0 \text{ e } b: y = -\frac{1}{2}x + 5; \quad r: 2x + y + 4 = 0 \text{ e } s: y = \frac{1}{2}x$$

Le rette a e b non sono perpendicolari perché $m_a = -2$ e $m_b = -\frac{1}{2}$ dunque $mm' \neq -1$.

Le rette r e s sono perpendicolari perché $m_r = -2$ e $m_s = \frac{1}{2}$, con $mm' = -1$.

■ Fascio improprio di rette

DEFINIZIONE

Un **fascio improprio** di rette è un insieme di rette tra loro parallele.

Dalla definizione si deduce che un fascio improprio di rette è costituito dalle infinite rette di un piano aventi la stessa direzione.

È noto che rette parallele possiedono lo stesso coefficiente angolare. Da ciò si deduce che, se $y = mx + q$ è l'equazione di una retta r e k un parametro, allora l'equazione: $y = mx + k$ fornisce, per ogni valore reale assunto da k , l'equazione di una retta parallela a r (con m numero reale fisso, coefficiente angolare comune a tutte le rette aventi la stessa direzione, e k variabile in R).

$$y = mx + k, \forall k \in R$$

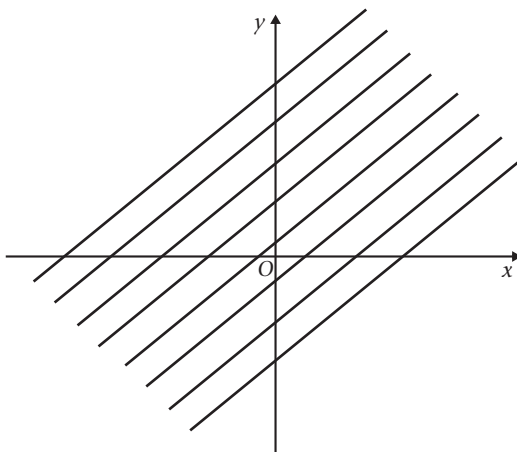
rappresenta l'equazione del fascio di rette tra loro parallele, tutte di coefficiente angolare m .

A ciascun valore reale attribuito a k corrisponde l'equazione di una retta del fascio.

Al valore $k = 0$ corrisponde la retta r del fascio di equazione $y = mx$, detta **retta base del fascio**, alla quale tutte le altre sono parallele.

Si demanda allo studente di individuare:

- l'equazione del fascio di rette parallele all'asse delle ascisse: ...
- l'equazione del fascio di rette parallele all'asse delle ordinate: ...



esempio

- L'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta di equazione: $y = \frac{1}{2}x + 1$ è: $y = \frac{1}{2}x + k, \forall k \in \mathbb{R}$.

- Il fascio di rette perpendicolari alla retta di equazione $y - 3 = 5x$ ha equazione:

$$y = -\frac{1}{5}x + k$$

Fascio proprio di rette

DEFINIZIONE

Un **fascio proprio** di rette è l'insieme di tutte le rette di un piano passanti per uno stesso punto P detto **centro del fascio**.

Si consideri, fra tutte le rette passanti per l'origine ed escluso l'asse y , quella che passa per il punto $P(x_p; y_p)$, di equazione: $y = mx + q$.

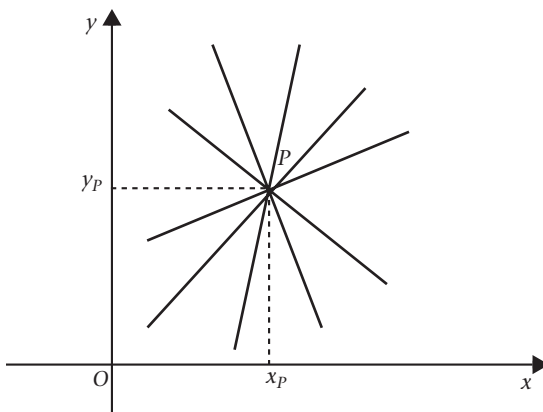
È noto che le coordinate di un punto appartenente a una retta, sostituite alle variabili dell'equazione della retta, trasformano l'equazione in un'uguaglianza numerica vera per cui, note le coordinate di P , si ha: $y_p = mx_p + q$.

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene:

$$y - y_p = mx + q - (mx_p + q) \Rightarrow y - y_p = mx + q - mx_p - q.$$

Se nel secondo membro si eliminano i termini opposti e si tiene conto della proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione e alla sottrazione: $mx - mx_p = m(x - x_p)$, si ottiene l'**equazione del fascio proprio** di centro $P(x_p; y_p)$: $y - y_p = m(x - x_p)$.

Da tale equazione è esclusa la retta passante per P e parallela all'asse y , di equazione $x = x_p$.



esempio

- L'equazione del fascio proprio di rette di centro $\left(-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ ha equazione:

$$y - \frac{2}{3} = m\left(x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = mx + \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}$$

Da tale equazione è esclusa la retta passante per il punto e parallela all'asse y , di equazione $x = -\frac{1}{2}$.

■ Equazione di una retta passante per un punto e avente coefficiente angolare noto

Per ottenere l'equazione di una retta, avente coefficiente direttivo m noto e passante per un punto $P(x_p; y_p)$, di cui si conoscono le coordinate, è necessario sostituire i valori noti nell'equazione del fascio proprio di centro il punto P : $y - y_p = m(x - x_p)$.

In alcuni casi, il coefficiente angolare, se non palesemente noto, può essere ottenuto da una o più informazioni (quali, per esempio: “la retta è parallela alla retta s di equazione ...”, “la retta è perpendicolare alla retta t di equazione ...”, “la retta possiede lo stesso coefficiente angolare della retta s ...”).

esempio

- Determinare l'equazione della retta r del fascio di centro $P(-1; 2)$ parallela alla retta s di equazione $y = 3x + 2$.

Il fascio di rette di centro $P(-1; 2)$ ha equazione: $y - 2 = m(x + 1)$. L'equazione della retta r si determina imponendo che $m_r = m_s = 3$, per cui:

$$y - 2 = 3(x + 1) \Rightarrow y = 3x + 3 + 2 \Rightarrow y = 3x + 5$$

- La retta passante per $A(1; -1)$ e di coefficiente angolare 3 ha equazione:

$$y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y + 1 = 3x - 3 \Rightarrow y = 3x - 4.$$

- Individuare l'equazione della retta r passante per $A(-2; 3)$ e parallela alla retta s di equazione: $5x + y + 1 = 0$.

r e s sono parallele pertanto possiedono lo stesso coefficiente angolare.

Il coefficiente angolare di s non è noto, ma si può facilmente calcolare: $m_s = -5$. La retta cercata ha dunque equazione:

$$y - 3 = -5(x + 2) \Rightarrow y = -5x - 10 + 3 \Rightarrow y = -5x - 7.$$

- Individuare l'equazione della retta r passante per $A(-2; 3)$ e perpendicolare alla retta s di equazione: $2x + 3y + 10 = 0$.

r e s sono perpendicolari pertanto i loro coefficienti angolari sono legati dalla relazione:

$$m_r = -\frac{1}{m_s}$$

Poiché $m_s = -\frac{2}{3}$, sarà allora: $m_r = \frac{3}{2}$.

La retta cercata ha dunque equazione $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 6$, in forma esplicita e $3x - 2y + 12 = 0$, in forma implicita.

● Equazioni di primo grado nel piano cartesiano

■ Risoluzione grafica di un'equazione numerica intera di primo grado in una sola incognita

È noto che risolvere **algebricamente** un'equazione numerica intera di primo grado nell'incognita x , della forma: $ax = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, significa individuare l'unico valore reale che la soddisfa ovvero che, sostituito all'incognita, la trasforma in un'uguaglianza numerica vera:

$$x = \frac{b}{a}$$

Risolvere **graficamente** in un piano cartesiano un'equazione numerica intera di primo grado nell'incognita x , della forma $ax = b$, con $a, b \in R$ e $a \neq 0$, significa individuare e rappresentare nel piano cartesiano gli infiniti punti della retta di equazione: $x = \frac{b}{a}$, quindi paral-

lela all'asse y . Se $b = 0$, l'equazione diventa $x = 0$ che, com'è noto, rappresenta l'asse y .

Risolvere **graficamente** in un piano cartesiano un'equazione numerica intera di primo grado nell'incognita y , della forma $ay = b$, con $a, b \in R$ e $a \neq 0$, significa individuare e rappresentare nel piano cartesiano gli infiniti punti della retta corrispondente di equazione:

$y = \frac{b}{a}$, quindi parallela all'asse x . Se $b = 0$, l'equazione diventa $y = 0$ che, com'è noto, rappresenta l'asse x .

Risoluzione grafica di un'equazione numerica intera di primo grado in due incognite

Un'equazione numerica intera di primo grado in due incognite, dopo aver eseguito le operazioni e ridotto i termini simili eventualmente presenti, può essere ricondotta alla forma: $ax + by + c = 0$, con $a, b \in R_0$ e $c \in R$.

Dal punto di vista **algebrico**, un'equazione numerica intera di primo grado in due incognite, della forma: $ax + by + c = 0$, con $a, b \in R_0$ e $c \in R$, se non è impossibile in R , ammette infinite soluzioni ovvero esistono infinite coppie di numeri che la verificano.

Risolvere **graficamente** in un piano cartesiano un'equazione numerica intera di primo grado in due incognite, della forma $ax + by + c = 0$, con $a, b \in R_0$ e $c \in R$, significa individuare e rappresentare nel piano cartesiano gli infiniti punti (aventi per coordinate le coppie di numeri reali soluzioni dell'equazione) appartenenti alla retta avente equazione implicita: $ax + by + c = 0$.

Sistemi di equazioni di primo grado nel piano cartesiano

Risoluzione grafica di un sistema di equazioni numeriche intere di primo grado

Tenendo conto di quanto studiato nei paragrafi precedenti, se si prende in esame un sistema numerico intero di primo grado, costituito da due equazioni nelle stesse incognite, è possibile asserire che:

- risolvere **algebricamente** il sistema significa individuare le infinite coppie di numeri reali che soddisfano contemporaneamente le due equazioni che lo compongono ovvero che, sostituiti alle incognite, trasformano le equazioni del sistema in uguaglianze numeriche vere;
- risolvere **graficamente** in un piano cartesiano il sistema significa individuare le posizioni reciproche delle rette rappresentate dalle equazioni che lo compongono.

La risoluzione grafica di un sistema prende il nome di metodo risolutivo grafico o semplicemente **metodo grafico**.

Le considerazioni sin qui compiute per un sistema costituito da due equazioni nelle stesse incognite possono essere estese a sistemi composti da un numero di equazioni superiore a due.

Per applicare il metodo grafico a un sistema della forma:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

si devono tracciare i grafici delle rette rappresentate dalle equazioni del sistema e osservare le posizioni reciproche delle due rette.

Tre sono i casi possibili:

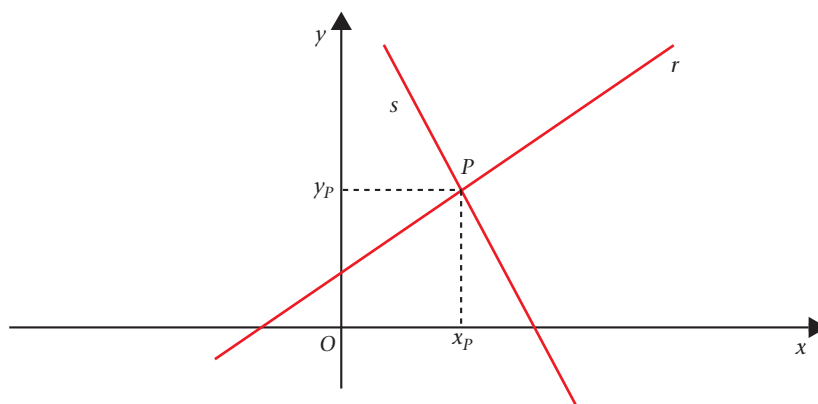
Caso 1: Le rette sono secanti.

Caso 2: Le rette sono sovrapposte.

Caso 3: Le rette sono parallele.

Caso 1: Le rette sono secanti

Se le rette sono secanti, ovvero si intersecano in un solo punto, allora il sistema è determinato in R e le coordinate del punto di intersezione rappresentano la coppia di numeri reali soluzione del sistema.



Se $r \cap s = \{P\}$, con $P(x_p; y_p)$, allora il sistema costituito dalle equazioni delle due rette:

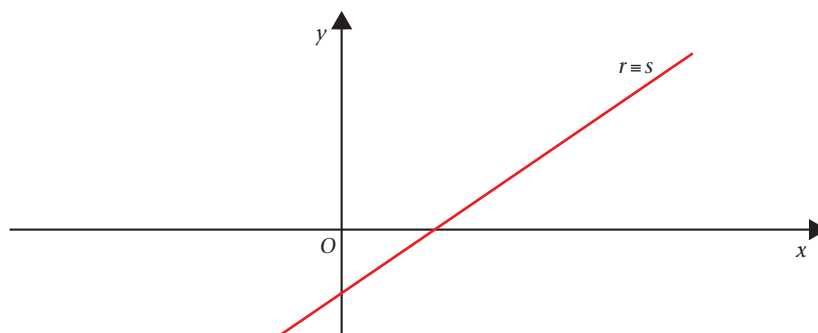
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

è determinato in R e la sua soluzione (unica) è la coppia di numeri reali $(x_p; y_p)$.

L'insieme delle soluzioni del sistema contiene, in tal caso, un solo elemento: $S = \{(x_p; y_p)\}$. È possibile stabilire se due rette sono secanti se si verifica che, nelle loro equazioni, i coefficienti delle incognite x e y non sono tra loro proporzionali: $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$.

Caso 2: Le rette sono sovrapposte

Se le rette sono sovrapposte, ovvero si intersecano in infiniti punti, allora il sistema è indeterminato in R .



Se $r = s$, allora il sistema costituito dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

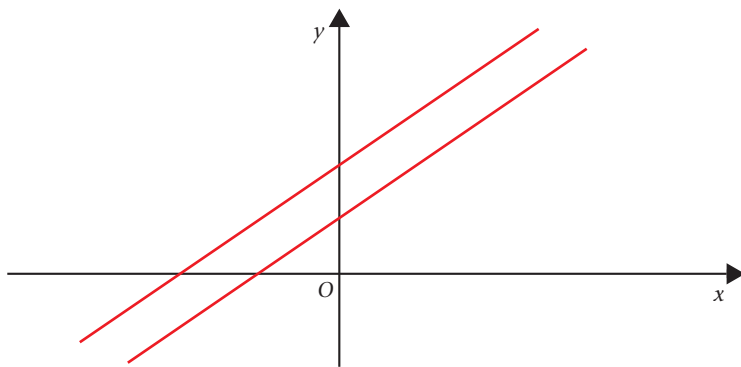
è indeterminato in R .

L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con R per cui: $S = R$.

È possibile stabilire se due rette sono sovrapposte se si verifica che, nelle loro equazioni, i coefficienti delle incognite x e y e i termini noti sono tra loro proporzionali: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$.

Caso 3: Le rette sono parallele

Se le rette sono parallele ovvero non hanno alcun punto in comune, allora il sistema è impossibile in R .



Se $r \neq s$, allora il sistema costituito dalle equazioni delle due rette:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

è impossibile in R .

L'insieme delle soluzioni del sistema è vuoto: $S = \emptyset$.

È possibile stabilire se due rette sono parallele se si verifica che, nelle loro equazioni, i coefficienti delle incognite sono proporzionali tra loro, ma non ai termini noti:

$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$ o se posseggono coefficienti angolari uguali.

Ovviamente, per ciascuno dei casi esaminati, vale anche il viceversa.

esempio

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 3x - y + 5 = 0 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$ con il metodo grafico.

Per risolvere il sistema assegnato con il metodo grafico, è necessario:

- eseguire tutte le operazioni necessarie fino a scrivere ciascuna equazione in forma esplicita:

$$\begin{cases} y = 3x + 5 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

- per ciascuna equazione, attribuire due valori arbitrari alla variabile x e ricavare i valori corrispondenti di y :

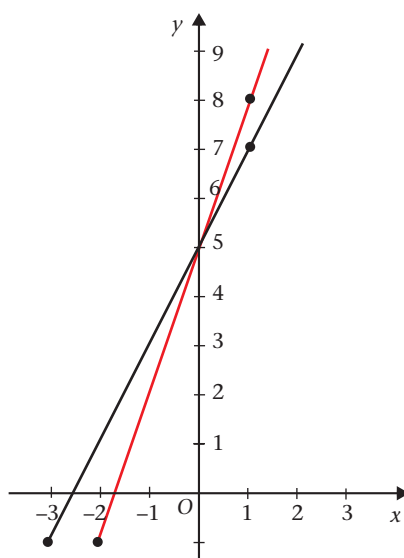
retta r : $y = 3x + 5$

x	y
-2	-1
1	8

retta s : $y = 2x + 5$

x	y
-3	-1
1	7

- rappresentare nel piano cartesiano i punti $(-2; -1)$, $(1; 8)$ della retta r e $(-3; -1)$, $(1; 7)$ della retta s .
- tracciare i segmenti congiungenti, rispettivamente, i due punti della retta r e i due punti della retta s : i due segmenti appartengono alle due rette corrispondenti alle due equazioni del sistema.



Il grafico informa che le rette si intersecano in $P(0; 5)$. L'insieme delle soluzioni del sistema è costituito da una sola coppia di numeri reali, corrispondente al punto di intersezione delle rette: $S = \{(0; 5)\}$.

- Risolvere il sistema $\begin{cases} y = 2x + 3 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ con il metodo grafico.

I coefficienti delle incognite sono proporzionali tra loro, ma non ai termini noti. Le rette sono quindi parallele (le due rette hanno infatti lo stesso coefficiente angolare). Il sistema è dunque impossibile. Infatti, se si individuano due coppie di punti per ciascuna retta, si rappresentano nel piano cartesiano, si congiungono tra loro i due punti individuati per ciascuna retta e si prendono in considerazione le rette di appartenenza dei segmenti congiungenti, si tratteranno due rette parallele.

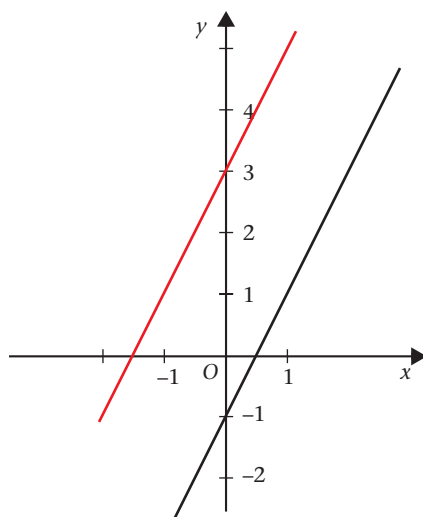
retta r : $y = 2x + 3$

x	y
-1	1
1	5

retta s : $y = 2x - 1$

x	y
-1	-3
1	1

I punti individuati che hanno coordinate: $(-1; 1)$ e $(1; 5)$ appartengono alla retta r e $(-1; -3)$, $(1; 1)$ appartengono alla retta s .

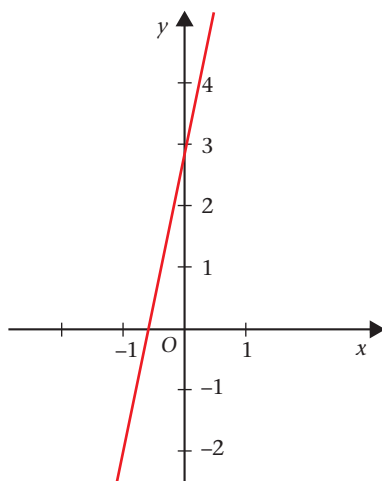


L'insieme delle soluzioni del sistema è dunque vuoto: $S = \emptyset$.

- Risolvere il sistema $\begin{cases} 10x - 2y + 6 = 0 \\ y = 5x + 3 \end{cases}$ con il metodo grafico.

$$\begin{cases} 10x - 2y + 6 = 0 \\ y = 5x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 10x + 6 \\ y = 5x + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5x + 3 \\ y = 5x + 3 \end{cases}$$

x	y
-1	-2
1	8



Il grafico informa che le rette coincidono, quindi il sistema è indeterminato in R . L'insieme delle soluzioni del sistema coincide con R : $S = R$.

Disequazioni di primo grado nel piano cartesiano

Risoluzione grafica di una disequazione numerica intera di primo grado in una sola incognita

Una disequazione numerica intera di primo grado in una sola incognita, dopo aver eseguito le operazioni e ridotto i termini simili eventualmente presenti, può essere ricondotta alla forma: $ax + c > 0$ o $ax + c < 0$ (il verso potrebbe anche essere $\leq$ o $\geq$).

Risolvere **algebricamente** la disequazione $ax + c > 0$ (o $ax + c < 0$) significa trovare i numeri reali che, sostituiti all'incognita, trasformano la disuguaglianza dei due membri in una disuguaglianza numerica vera.

Risolvere **graficamente** nel piano cartesiano una disequazione della forma $ax + c > 0$ significa risolvere il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax + c \\ y > 0 \end{cases}$$

quindi cercare quei punti del piano che soddisfano contemporaneamente l'equazione $y = ax + c$ e la disequazione $y > 0$. Essi sono i punti che appartengono alla retta di equazione $y = ax + c$ e aventi ordinata positiva.

Risolvere **graficamente** nel piano cartesiano una disequazione della forma $ax + c < 0$ significa risolvere il sistema misto:

$$\begin{cases} y = ax + c \\ y < 0 \end{cases}$$

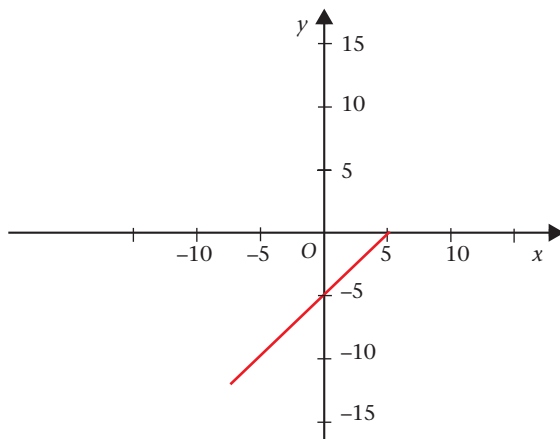
quindi cercare i punti del piano che appartengono alla retta di equazione $y = ax + c$ e aventi ordinata negativa.

Se il verso della disequazione contiene il simbolo di uguaglianza, si deve prendere in considerazione anche il punto della retta avente ordinata nulla, quindi anche il punto dell'asse x appartenente alla retta r (la cui ascissa si ottiene assegnando il valore 0 alla variabile y dell'equazione della retta: $x = -\frac{c}{a}$).

esempio

- $x - 5 \leq 0$.

L'insieme delle soluzioni della disequazione contiene le ascisse dei punti della retta r di equazione $y = x - 5$, aventi ordinata negativa o nulla. L'ascissa $x = 5$ del punto appartenente sia all'asse x che alla retta r appartiene all'insieme delle soluzioni perché il verso della disequazione contiene anche il simbolo di uguaglianza.



Esercizi

SAPER FARE

Calcolare la distanza tra i punti A e B , appartenenti alla retta reale e aventi le ascisse indicate

unpo' diaiuto 

■ $x_A = -2, x_B = -\frac{1}{2} \Rightarrow \overline{AB} = \left| -2 - \left(-\frac{1}{2} \right) \right| = \left| -2 + \frac{1}{2} \right| = \left| -\frac{3}{2} \right| = \frac{3}{2}$

1 $x_A = 3, x_B = 1$

2 $x_A = 1, x_B = -1$

3 $x_A = -4, x_B = -1$

4 $x_A = -10, x_B = 8$

5 $x_A = -14, x_B = -3$

6 $x_A = 7, x_B = 5$

7 $x_A = -3, x_B = -\frac{2}{5}$

8 $x_A = \frac{3}{4}, x_B = \frac{1}{4}$

9 $x_A = -\frac{1}{2}, x_B = -1$

10 $x_A = 1, x_B = -\frac{1}{4}$

Calcolare l'ascissa del punto medio M del segmento AB i cui estremi, appartenenti alla retta reale, hanno le seguenti ascisse

unpo' diaiuto 

■ $x_A = -2, x_B = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_M = \frac{-2 + \left(-\frac{1}{2} \right)}{2} = \frac{-2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{-\frac{5}{2}}{2} = -\frac{5}{4}$

11 $x_A = 3, x_B = 1$

12 $x_A = 1, x_B = -1$

13 $x_A = -4, x_B = -2$

14 $x_A = -14, x_B = 4$

15 $x_A = -4, x_B = -3$

16 $x_A = 7, x_B = 1$

17 $x_A = \frac{2}{5}, x_B = -\frac{1}{5}$

18 $x_A = -\frac{1}{6}, x_B = -\frac{5}{6}$

19 $x_A = -1, x_B = -\frac{1}{9}$

20 $x_A = \frac{1}{2}, x_B = \frac{1}{4}$

21 $x_A = -\frac{1}{2}, x_B = 1$

Individuare il quadrante o l'asse del piano cartesiano di appartenenza di ciascuno dei seguenti punti e rappresentare poi i punti nel piano cartesiano

unpo' diaiuto

$A(1; 3)$. Entrambe le coordinate sono positive quindi A appartiene al primo quadrante.

$F(-1; 3)$. L'ascissa è negativa e l'ordinata è positiva quindi F appartiene al secondo quadrante.

$C(1; -2)$. L'ascissa è positiva e l'ordinata è negativa quindi C appartiene al quarto quadrante.

$G(-1; -2)$. Entrambe le coordinate sono negative quindi G appartiene al terzo quadrante.

$B(0; 2)$. L'ascissa è nulla e l'ordinata è positiva quindi B appartiene alla semiretta positiva dell'asse y .

$M(0; -2)$. L'ascissa è nulla e l'ordinata è negativa quindi M appartiene alla semiretta negativa dell'asse y .

$N(1; 0)$. L'ordinata è nulla e l'ascissa è positiva quindi N appartiene alla semiretta positiva dell'asse x .

$P(-1; 0)$. L'ordinata è nulla e l'ascissa è negativa quindi N si trova sulla semiretta negativa dell'asse x .

22 $(1; 4)$

24 $(0; 1)$

26 $(1; -1)$

28 $(0; 0)$

30 $(-15; 11)$

32 $(10; 14)$

34 $(0; 5)$

36 $\left(\frac{5}{6}; \frac{4}{3}\right)$

23 $(1; -4)$

25 $(1; 0)$

27 $(-2; -2)$

29 $(-1; -8)$

31 $(-14; 13)$

33 $(11; -2)$

35 $(8; 0)$

37 $\left(-\frac{1}{5}; -\frac{3}{7}\right)$

38 $\left(\frac{9}{5}; -\frac{1}{2}\right)$

Calcolare la distanza tra i seguenti punti

unpo' diaiuto

■ $A(1; 3)$ e $F(-1; 3)$.

I punti hanno la stessa ordinata quindi entrambi appartengono alla retta di equazione $y = 3$ parallela all'asse x . La distanza tra i due punti è data da:

$$\overline{AF} = |x_A - x_F| = |1 + 1| = 2$$

■ $C(-1; -2)$ e $G(-1; 2)$

I punti hanno la stessa ascissa quindi entrambi appartengono alla retta di equazione $x = -1$ parallela all'asse y . La distanza tra i due punti è data da:

$$\overline{CG} = |y_C - y_G| = |-2 - 2| = 4$$

■ $P(-1; 2)$ e $Q(4; -2)$

La distanza tra i due punti è data da:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2} = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (2 + 2)^2} = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$$

39 $(-1; -2), (-1; 2)$

41 $(7; -9), (10; -5)$

43 $(-1; -2), (-1; 4)$

44 $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$

46 $\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

48 $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{3}\right)$

50 $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$

52 $(2; -1), \left(-1; \frac{1}{4}\right)$

54 $\left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$

55 $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right)$

56 $(6; -5), \left(-1; +\frac{1}{4}\right)$

57 $(1; 2), (0; 1)$

59 $(-1; -2), (1; 3)$

61 $(2; 3), (4; 0)$

63 $(-3; -2), (1; -3)$

40 $(-1; 1), (5; 1)$

42 $(3; 9), (11; 3)$

45 $(6; 5), \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$

47 $\left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

49 $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

51 $\left(-\frac{1}{2}; 1\right), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$

53 $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{9}\right), \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}\right)$

58 $(-8; -2), (-9; -1)$

60 $(3; -1), (1; 1)$

62 $(-1; -1), (2; 0)$

64 $(-2; 2), (-1; -2)$

Dopo aver calcolato la distanza tra i seguenti punti, determinare le coordinate del punto medio del segmento che li ha per estremi

un po' di aiuto

- $P(4; 0)$ e $Q(-5; 0)$. I punti appartengono entrambi all'asse x , per cui la loro distanza è data dalla differenza delle loro ascisse: $\overline{PQ} = |4 - (-5)| = 9$. Il punto medio del segmento PQ ha le seguenti coordinate:

$$x_M = \frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}, y_M = 0, \text{ per cui: } M\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$$

- $A(0; -4)$ e $B(0; 2)$. I punti appartengono entrambi all'asse y , per cui la loro distanza è data dalla differenza delle loro ordinate: $\overline{AB} = |-4 - 2| = 6$. Il punto medio del segmento AB ha le seguenti coordinate:

$$x_M = 0, y_M = \frac{-4 + 2}{2} = -1, \text{ per cui: } M(0; -1)$$

■ $P\left(\frac{1}{2}; 3\right)$ e $Q(6; 3)$.

I punti appartengono a una retta parallela all'asse x , per cui la loro distanza è data dalla differenza delle loro ascisse: $\overline{PQ} = \left|\frac{1}{2} - 6\right| = \frac{11}{2}$.

Il punto medio del segmento PQ ha le seguenti coordinate:

$$x_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + 6\right) = \frac{13}{4}, y_M = 3, \text{ per cui: } M\left(\frac{13}{4}; 3\right).$$

■ $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ e $N\left(\frac{1}{2}; -1\right)$.

I punti appartengono a una retta parallela all'asse y , per cui la loro distanza è data dalla differenza delle loro ordinate: $\overline{PN} = \left|-\frac{1}{2} - (-1)\right| = \left|-\frac{1}{2} + 1\right| = \frac{1}{2}$.

Il punto medio del segmento PN ha le seguenti coordinate:

$$x_M = \frac{1}{2}, y_M = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{4}, \text{ per cui: } M\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right).$$

■ $P(1; 1), Q(2; -4)$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1-2)^2 + (1+4)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$x_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, y_M = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}, \text{ per cui: } M\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

65 $(1; -3), (-3; -6)$

66 $(-1; 3), (3; 6)$

67 $(5; 1), (2; 2)$

68 $(1; -3), (1; 5)$

69 $(-1; -1), (2; -1)$

70 $(-1; 1), (0; -1)$

71 $(2; -6), (-6; -12)$

72 $(-4; 12), (12; 24)$

73 $(-2; -2), (-5; -1)$

74 $\left(-\frac{5}{2}; 0\right), \left(\frac{35}{2}; 5\right)$

Riconoscere, tra le seguenti, le equazioni che rappresentano un asse cartesiano, una retta parallela a uno degli assi o una retta obliqua (passante o meno per l'origine)

unpo' diaiuto

- $y = 2x$ è l'equazione esplicita di una retta r obliqua e passante per l'origine (nell'equazione manca il termine noto).
- $4x + y = 0$ è l'equazione implicita di una retta r obliqua e passante per l'origine (nell'equazione manca il termine noto).
- $3y = 0$ è l'equazione dell'asse x (infatti: $3y = 0 \Rightarrow y = 0$).
- $-\frac{1}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0$ è l'equazione dell'asse y .
- $y = 2x + 1$ è l'equazione esplicita di una retta r obliqua e non passante per l'origine.
- $3x - y + 1 = 0$ è l'equazione implicita di una retta r obliqua e non passante per l'origine.
- $x = 3$ è l'equazione di una retta r parallela all'asse y (tutti i suoi punti hanno ascissa 3).
- $y = -1$ è l'equazione di una retta r parallela all'asse x (tutti i suoi punti hanno ordinata -1).

135 $x = 6$

137 $y = 3x + 1$

139 $5x - 3y = 0$

141 $y = 1$

143 $10x - y = -1$

145 $2y = 1$

147 $\frac{2}{5}x + y = \frac{1}{3}$

149 $\frac{7}{2}y = 1$

136 $y = x$

138 $y = -5x$

140 $6x + 2y - 1 = 0$

142 $x = y$

144 $2y = x - 1$

146 $x = -\frac{1}{2}$

148 $\frac{2}{3}x = 0$

150 $-\frac{5}{6}y = 0$

Completare le seguenti tabelle che si riferiscono a equazioni di funzioni

unpo' diaiuto

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 2x + 1$	$2(-3) + 1 = -5$	$2(-1) + 1 = -1$	$2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$
x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	10
$y = 2x + 1$	$2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$	$2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 10 + 1 = 21$

151

x	-3	-2	$-\frac{1}{3}$	0
$y = 3x$				
x	1	$\frac{1}{3}$	2	3
$y = 3x$				

152

x	-3	-2	$-\frac{1}{3}$	0
$y = -3x$				
x	1	$\frac{1}{3}$	2	3
$y = -3x$				

153

x	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = -x + 1$				
x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
$y = -x + 1$				

154

x	-4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2}x + 1$				
x	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$y = \frac{1}{2}x + 1$				

155

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 2x - 1$				
x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
$y = 2x - 1$				

156

x	-3	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 2x$				
x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
$y = 2x$				

157

x	-3	-2	$-\frac{1}{3}$	0
$y = -2x$				
x	1	$\frac{1}{3}$	2	3
$y = -2x$				

158

x	-4	-2	$-\frac{1}{2}$	0
$y = -x + 2$				
x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
$y = -x + 2$				

159

x	-4	-3	-2	$-\frac{1}{2}$
$y = \frac{1}{2}x + 2$				
x	0	1	$\frac{1}{2}$	2
$y = \frac{1}{2}x + 2$				

160

x	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	0
$y = 2x + 1$				
x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
$y = 2x + 1$				

Stabilire se le funzioni rappresentate dalle seguenti equazioni sono affini, lineari o costanti

unpo' diaiuto

- $y = 2x$ è l'equazione di una funzione lineare (a essa corrisponde una retta r obliqua e passante per l'origine).
- $y = 2x + 1$ è l'equazione di una funzione affine (a essa corrisponde una retta r obliqua e non passante per l'origine).
- $3y = 1$ è l'equazione di una funzione costante (a essa corrisponde una retta parallela all'asse x).

161 $y = 1$

163 $y = x + 1$

165 $5x - y = 0$

167 $y = 10$

169 $x - 7y = -3$

171 $2y = 10$

173 $\frac{2}{5}x + y = 0$

162 $y = -x$

164 $y = -6x$

166 $x + 2y - 1 = 0$

168 $x = y$

170 $2y - x - 1 = 0$

172 $y = -\frac{1}{2}x$

174 $\frac{2}{3}y = \frac{3}{2}$

175 $\frac{7}{2}y = x$

177 $2x = 4y$

179 $y = -2x$

176 $\frac{1}{8}y = 0$

178 $y = 4$

180 $y = 4x + 5$

Tracciare il grafico delle funzioni rappresentate da ciascuna delle seguenti equazioni dopo aver individuato dominio e codominio

unpo' diaiuto

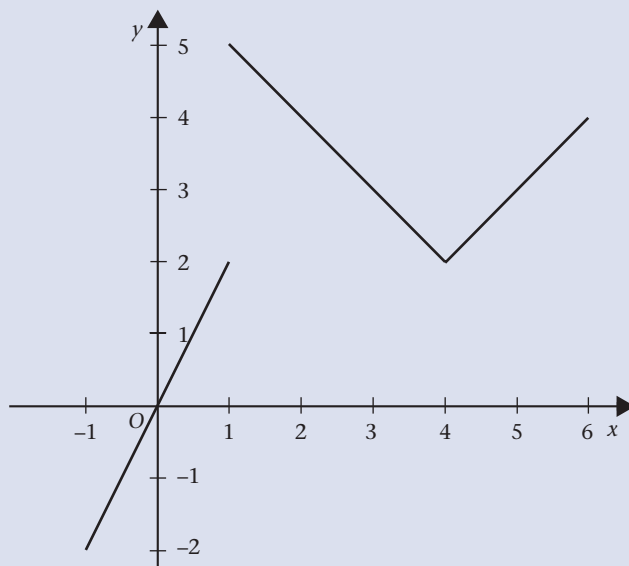
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ 6 - x & \text{se } 1 \leq x \leq 4 \\ x - 2 & \text{se } 4 < x \leq 6 \end{cases}$$

Il dominio della funzione è l'insieme: $[-1, 6]$.

Il grafico della funzione è formato:

- in $[-1, 1)$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = 2x$;
- in $[1, 4]$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = 6 - x$;
- in $(4, 6]$ dal tratto del grafico della retta di equazione $y = x - 2$.

Il codominio della funzione è l'insieme: $[-2, 4]$



181 $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2x & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

183 $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ 2x + 1 & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 3x - 2 & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$

182 $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ x - 1 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases}$

184 $f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 4 & \text{se } 2 < x \leq 3 \end{cases}$

$$185 \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 4x+1 & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ -x+3 & \text{se } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$187 \quad f(x) = \begin{cases} 5x-1 & \text{se } -1 \leq x < 1 \\ x+6 & \text{se } 1 \leq x < 4 \\ 2x-3 & \text{se } 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

$$186 \quad f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{se } -4 \leq x \leq 1 \\ 2x+2 & \text{se } 1 < x < 3 \\ -2x+1 & \text{se } 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$188 \quad f(x) = \begin{cases} 4x-2 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ x+3 & \text{se } 2 \leq x < 5 \\ x-3 & \text{se } 5 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Tracciare il grafico di ciascuna delle funzioni aventi le seguenti equazioni

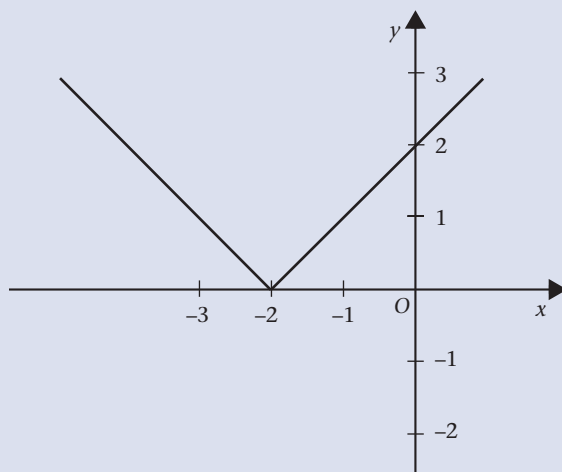
unpo' diaiuto

Si tracci il grafico della funzione di equazione $f(x) = |x+2|$.

Per definizione si ha:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x+2 \geq 0 \\ -x-2 & \text{se } x+2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

La funzione è a tratti e la sua rappresentazione grafica è la seguente:



$$189 \quad f(x) = |x+3|$$

$$190 \quad f(x) = |2x+1|$$

$$191 \quad f(x) = |2x-1|$$

$$192 \quad f(x) = |4-x|$$

$$193 \quad f(x) = |1-3x|$$

$$194 \quad f(x) = |2-2x|$$

$$195 \quad f(x) = |2x-4|$$

$$196 \quad f(x) = |4x-11|$$

Calcolare il coefficiente angolare di ciascuna delle rette aventi le seguenti equazioni

unpo' diaiuto

$$3x - 2y - 3 = 0.$$

L'equazione della retta è espressa in forma implicita pertanto il coefficiente angolare è dato da:

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$$

197 $8x - 4y - 1 = 0$

198 $2x - 4y + 11 = 0$

199 $16x + 2y + 3 = 0$

200 $6x + y = 0$

201 $y = 2x + 1$

202 $y = -x$

203 $y = \frac{2}{5}x - 3$

204 $y = -\frac{3}{4}x + 2$

205 $4y = x$

206 $y - 2x = 1$

Tracciare il grafico delle rette corrispondenti alle seguenti equazioni e stabilire, in base al segno del loro coefficiente angolare, se le funzioni a esse corrispondenti sono crescenti, decrescenti o costanti

unpo' diaiuto

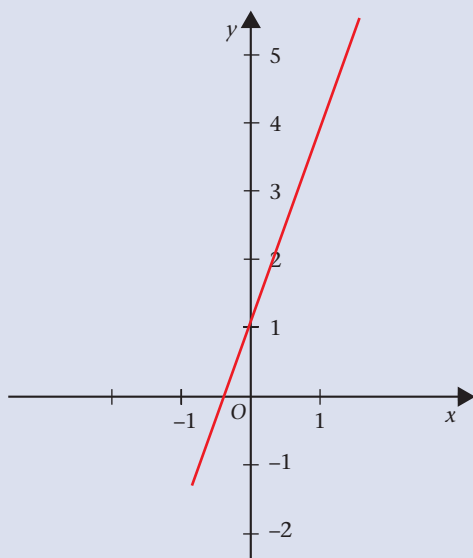
- $3x - y + 1 = 0$ è l'equazione di una retta obliqua.

La sua equazione esplicita è: $y = 3x + 1$.

Per tracciare il suo grafico nel piano cartesiano, è necessario individuare due suoi punti qualsiasi:

x	y
0	1
1	4

Il grafico della retta è:

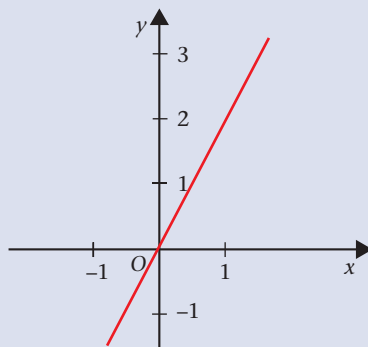


Il coefficiente angolare della retta è uguale a $3 > 0$ quindi la funzione affine di equazione $y = 3x + 1$ è crescente.

- $y = 2x$ è l'equazione di una retta passante per l'origine. Per tracciare il grafico è sufficiente individuare un altro punto della retta:

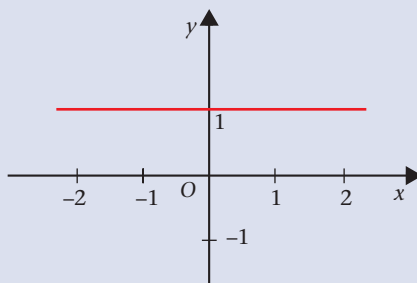
x	y
1	2

Il grafico della retta è:



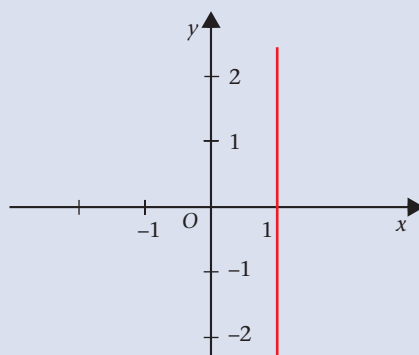
Il coefficiente angolare della retta è uguale a $2 > 0$ quindi la funzione lineare di equazione $y = 2x$ è crescente.

- $y = 1$ è l'equazione di una retta parallela all'asse x . Per tracciare il suo grafico è sufficiente tracciare la retta parallela all'asse x e passante per il punto dell'asse y avente ordinata 1:



Il coefficiente angolare della retta è uguale a 0 quindi la funzione di equazione $y = 1$ è costante.

- $x = 1$ è l'equazione di una retta parallela all'asse y . Per tracciare il suo grafico è sufficiente tracciare la retta parallela all'asse y e passante per il punto dell'asse x avente ascissa 1:



207 $x = 1$

209 $y = x$

211 $y = x + 1$

213 $y = -3x + 2$

215 $y = -x$

217 $x = -\frac{1}{2}$

219 $y = \frac{1}{2}x$

221 $x = -1$

223 $x = 6$

225 $y = 2x$

227 $y = 4x + 3$

208 $y = 2$

210 $y = 2x$

212 $y = -x - 1$

214 $y = x - 5$

216 $x = -2$

218 $y = \frac{1}{4}$

220 $2x = y + 1$

222 $y = 0$

224 $y = 1$

226 $y = 3x$

228 $y = -2x - 6$

Individuare l'equazione del fascio improprio di rette parallele e quella del fascio improprio di rette perpendicolari a ciascuna delle seguenti rette

unpo' diaiuto

■ $2x - 2y + 1 = 0.$

L'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta assegnata ha equazione:

$$x - y + k = 0, \forall k \in \mathbb{R}.$$

L'equazione del fascio improprio di rette perpendicolari alla retta assegnata ha equazione: $y = -x + k, \forall k \in \mathbb{R}.$

229 $x = -\frac{1}{2}$

230 $y = \frac{5}{4}$

231 $3x + 12y + 1 = 0$

232 $-5y - 20x + 3 = 0$

233 $y = -10 - x$

234 $10x - 2y + 1 = 0$

235 $-2x + 4y = 3$

236 $6x + 12y + 11 = 0$

237 $-2y - 8x + 1 = 0$

238 $y = -3x + 2$

239 $y = x - 5$

240 $y = -x$

241 $x = -2$

242 $x = -\frac{1}{2}$

243 $y = \frac{1}{4}$

244 $2x = 12y + 1$

Individuare l'equazione del fascio di rette avente centro in ciascuno dei seguenti punti

unpo' diaiuto

■ Individuare l'equazione del fascio di rette avente centro in $(4; -1)$

L'equazione del fascio proprio di rette di centro $(4; -1)$ ha equazione:

$$y + 1 = m(x - 4) \Rightarrow y = mx - 4m - 1$$

A tale equazione va aggiunta $x = 4$, equazione della retta passante per P e parallela all'asse y .

245 $(1; 2)$

247 $(3; -4)$

249 $(-7; -3)$

250 $\left(-1; \frac{5}{6}\right)$

252 $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{5}\right)$

254 $\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{6}\right)$

246 $(1; -2)$

248 $(-6; 0)$

251 $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$

253 $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{3}\right)$

Individuare l'equazione passante per ciascuno dei seguenti punti e parallela alla retta a fianco specificata

un po' di aiuto

- Determinare l'equazione della retta passante per $(2; -1)$ e parallela alla retta s di equazione $2x + 3y + 1 = 0$.

Il coefficiente angolare della retta s è uguale a: $m_s = -\frac{2}{3}$ per cui la retta cercata avrà equazione:

$$y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} - 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

255 $(0; 0); 2x - 3y + 2 = 0$

256 $(-1; -1); 3x - y - 2 = 0$

257 $(-3; 4); y = 4x$

258 $(0; -5); y = -3x + 2$

259 $(-4; -3); -x - y + 1 = 0$

260 $\left(0; -\frac{6}{5}\right); 2x - 3y - 1 = 0$

261 $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\right); 2x - 12y - 3 = 0$

262 $\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right); y = \frac{2}{3}x - 1$

263 $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right); y = -\frac{1}{5}x + 2$

264 $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{7}\right); y = \frac{3}{4}x$

Individuare l'equazione passante per ciascuno dei seguenti punti e perpendicolare alla retta a fianco specificata

unpo' diaiuto

- Determinare l'equazione della retta passante per $(2; -1)$ e perpendicolare alla retta s di equazione $2x + 3y + 1 = 0$.

Il coefficiente angolare della retta s è uguale a: $m_s = -\frac{2}{3}$ per cui la retta cercata avrà equazione:

$$y + 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 3 - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 4$$

265 $(0; 0); 3x - 4y = 0$

267 $(3; -2); y = 5x + 2$

269 $(-2; 1); -x - y + 1 = 0$

270 $\left(0; -\frac{1}{3}\right); 3x - 2y - 4 = 0$

272 $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right); y = \frac{2}{3}x + 1$

274 $\left(-\frac{3}{5}; \frac{1}{3}\right); y = -\frac{3}{2}x + 3$

266 $(2; -1); x - 2y - 1 = 0$

268 $(0; -6); y = -3x - 2$

271 $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right); 2x - 2y - 1 = 0$

273 $\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{3}\right); y = -\frac{1}{3}x - 2$

Rappresentare graficamente le seguenti equazioni numeriche intere in una o due incognite

unpo' diaiuto

- $x + 3y + 9 = 0$ è l'equazione di una retta r obliqua del piano cartesiano.

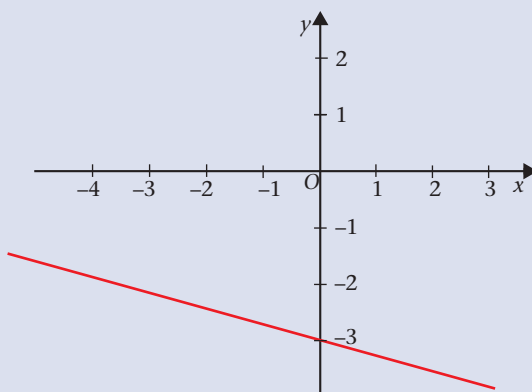
Per rappresentare graficamente l'equazione, è necessario tracciare il grafico della retta r di equazione: $x + 3y + 9 = 0$.

Per tracciare il suo grafico nel piano cartesiano, è necessario individuare due suoi punti qualsiasi. Prima conviene rendere l'equazione esplicita rispetto a y :

$$y = -\frac{1}{3}x - 3$$

x	y
0	-3
-9	0

Il grafico della retta è il seguente:



275 $2x = 0$

277 $-2x = 0$

279 $10x = 10$

281 $-5x = 5$

283 $-3x = -6$

285 $x + \sqrt{1} = \sqrt[3]{1}$

287 $x - \sqrt[3]{1000} = 5$

289 $3y - 3 = 0$

291 $y + 1 = 2y$

293 $x + 2 = -3$

295 $24x - 8 = 0$

297 $-14y - 7 = 0$

276 $5x = 0$

278 $2y = 2$

280 $4x = -4$

282 $2x = 1$

284 $10y = -5$

286 $y - 12 = 2$

288 $x - 2 = -x$

290 $2 - 3x - 1 = 1$

292 $x - 3 = 3 + 2x$

294 $6y - \sqrt{144} = 0$

296 $6x + 24 = 0$

298 $-8x + 4 = 0$

Stabilire se le due rette di ciascuna delle seguenti coppie sono parallele o perpendicolari

unpo' diaiuto

- $r: 6x + 2y = 0$ e $s: y = -3x + 1$.
 $m_r = -3$ e $m_s = -3$ per cui r e s sono parallele.

- $r: y = \frac{1}{2}x$ e $s: 4x + 2y = 0$.
 $m_r = \frac{1}{2}$ e $m_s = -2$ dunque r e s sono perpendicolari.

299 $r: 2x + y = 0, s: 4x + 2y = 0$

300 $r: y = 2x + 4, s: x + 2y = -2$

301 $r: y = x + 4, s: x + y + 2 = 0$

302 $r: 12x + 4y + 2 = 0, s: 3x + y + 2 = 0$

303 $r: 6x + 4y + 1 = 0, s: 3x + 2y - 11 = 0$

304 $r: -6x + 3y + 4 = 0, s: y = -\frac{1}{2}x + 1$

305 $r: y = 3x, s: 3x - y - 1 = 0$

306 $r: y = -3x + 1, s: -x + 3y + 1 = 0$

307 $r: y = -x - 4, s: x + y + 1 = 0$

308 $r: 2x + y - 1 = 0, s: x - 2y + 1 = 0$

Stabilire se le due rette di ciascuna delle seguenti coppie non hanno alcun punto in comune (sono parallele), hanno un solo punto in comune (sono secanti), oppure hanno infiniti punti in comune (sono sovrapposte)

unpo' diaiuto

■ $r: 2x - 2y + 1 = 0$ e $s: 10x + 5y = 0$.

$m_r = 1$ e $m_s = -2$ per cui r e s non sono parallele. I coefficienti delle incognite x e y delle due equazioni non sono tra loro proporzionali: $\frac{2}{10} \neq \frac{-2}{5}$ dunque r e s sono secanti.

■ $r: y = -\frac{1}{2}x$ e $s: 3x + 6y - 7 = 0$.

$m_r = -\frac{1}{2}$ e $m_s = -\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} \neq \frac{0}{-7}$ dunque r e s sono parallele.

■ $r: 15x + 30y - 3 = 0$ e $s: 5x + 10y - 1 = 0$.

$m_r = -\frac{1}{2}$ e $m_s = -\frac{1}{2}$ con $\frac{15}{5} = \frac{30}{10} = \frac{-3}{-1}$ dunque r e s sono sovrapposte.

309 $r: y = 4x + 1$, $s: 8x - 2y + 5 = 0$

310 $r: y = -x + 2$, $s: 2x + 2y - 4 = 0$

311 $r: y = -x + 10$, $s: 4x - 2y + 5 = 0$

312 $r: 3x - 6y - 1 = 0$, $s: 7x + 14y + 1 = 0$

313 $r: 4x - 8y - 1 = 0$, $s: 8x - 16y - 1 = 0$

314 $r: y = 3x + 1$, $s: y = 3x - 2$

315 $r: y = 6x - 1$, $s: y = 6x - 3$

316 $r: y = -2x - 9$, $s: 18x + 9y - 2 = 0$

317 $r: y = 3x$, $s: 18x + 6y = 0$

318 $r: y = 4x$, $s: 20x - 5y = 0$

319 $r: y = -4x$, $s: 5x + 20y = 0$

320 $r: 4x - 4y + 1 = 0$, $s: y = x$

321 $r: 4x - 3y - 6 = 0$, $s: 8x - 6y - 12 = 0$

322 $r: x - 5y + 6 = 0$, $s: -7x + 35y - 1 = 0$

323 $r: 4x - 24y + 1 = 0$, $s: x - 6y - 1 = 0$

324 $r: x - 2y = 0$, $s: 2x = 4y$

Risolvere graficamente i seguenti sistemi numerici interi di primo grado di due equazioni in due incognite

unpo' diaiuto

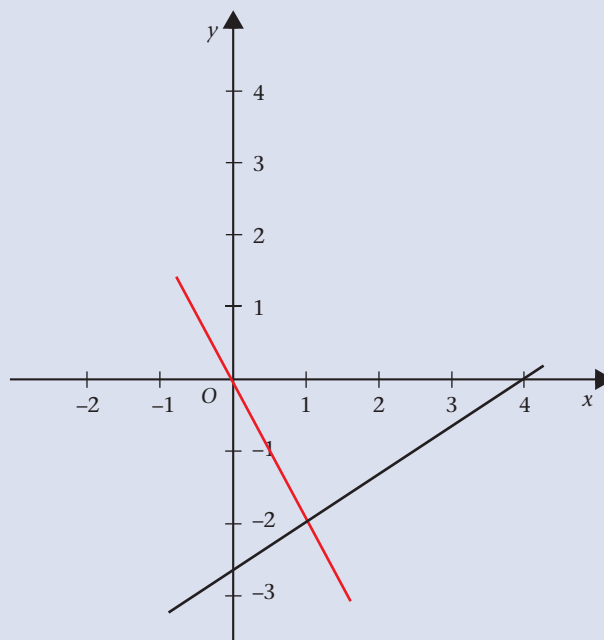
■ $\begin{cases} 2x - 3y - 8 = 0 \\ 10x + 5y = 0 \end{cases}$

Per rappresentare le due rette nel piano cartesiano, è necessario individuare una coppia di punti per ciascuna equazione:

x	y
1	-2
4	0

x	y
1	-2
0	0

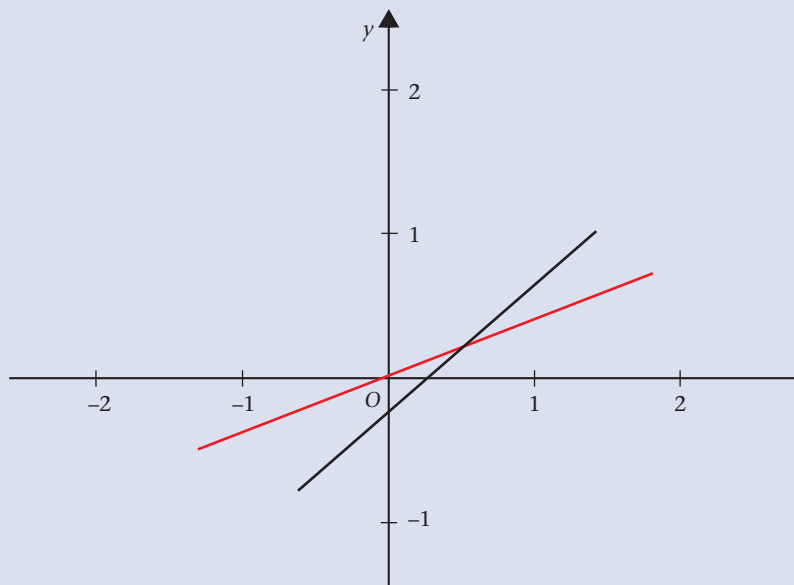
Già dalle due tabelle si evince che le due rette sono secanti e si intersecano nel punto $(1; -2)$. La rappresentazione grafica avalla la deduzione:



Il sistema è dunque determinato in R con soluzione: $(1; -2)$.

■
$$\begin{cases} 2x - 4y - 1 = 0 \\ -5x + 10y = 0 \end{cases}$$

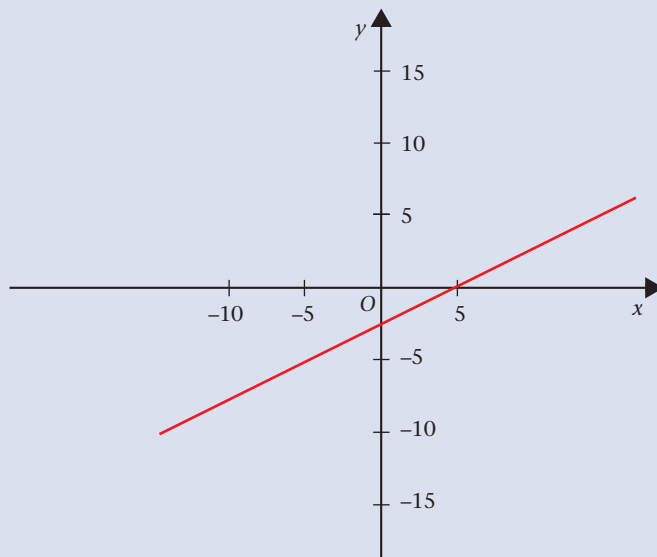
Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare e i coefficienti di x e y sono proporzionali tra loro, ma non ai termini noti. Le due rette sono quindi parallele. La rappresentazione grafica avalla la considerazione:



Il sistema è dunque impossibile in R .

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ -3x + 6y + 15 = 0 \end{cases}$$

Le due rette hanno lo stesso coefficiente angolare e i coefficienti di x e y sono proporzionali tra loro e ai termini noti. Le due rette sono quindi sovrapposte. La rappresentazione grafica avalla la considerazione:



Il sistema è dunque indeterminato in R .

$$325 \quad \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}$$

$$327 \quad \begin{cases} 2x = 1 + 3y \\ 4x - 6y + 1 = 2 \end{cases}$$

$$329 \quad \begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 8x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$331 \quad \begin{cases} -2y = 1 - 2x \\ 3x - 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$333 \quad \begin{cases} 3x - 5y = 3 \\ y - 7x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$335 \quad \begin{cases} -x = -2y + 8 \\ 11x - 6y = 12 \end{cases}$$

$$326 \quad \begin{cases} -3x + 5y = 6 \\ x - 8y = -2 \end{cases}$$

$$328 \quad \begin{cases} -3x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases}$$

$$330 \quad \begin{cases} -2x + y + 2 = 0 \\ 5x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$332 \quad \begin{cases} -x - y = -1 \\ 2x - 3y = 7 \end{cases}$$

$$334 \quad \begin{cases} 5x - 15 - 2y = 0 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

$$336 \quad \begin{cases} 5x - 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Risolvere graficamente le seguenti disequazioni numeriche intere in una sola incognita

unpo' diaiuto

PARTE

1

ESERCIZI

Geometria
analitica
di base
(prima
parte)

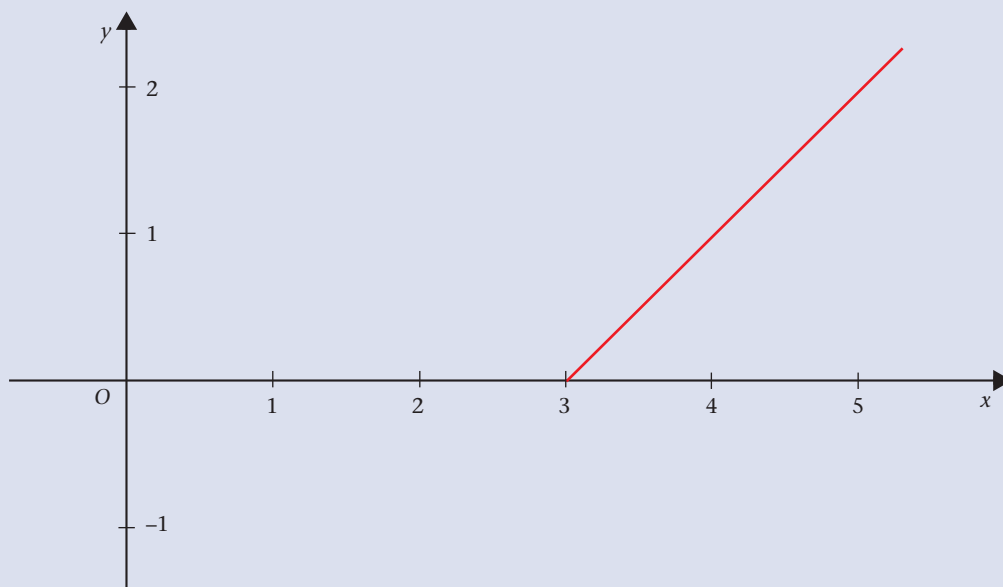
■ $3x + 6 < -18 + 11x$.

Se si trasportano tutti i termini in un membro, si riducono i termini simili e si dividono entrambi i membri per il fattore comune, si ottiene: $x - 3 > 0$.

Risolvere graficamente la disequazione significa risolvere il sistema misto:

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y > 0 \end{cases}$$

quindi cercare i punti del piano che soddisfano contemporaneamente l'equazione $y = x - 3$ e la disequazione $y > 0$. Essi sono i punti che appartengono alla retta di equazione $y = x - 3$ e che posseggono ordinate positive.



337 $-x < 0$

338 $5x > 0$

339 $-2x \leq 0$

340 $12x > -2$

341 $121x \geq -11$

342 $-8x \geq -4$

343 $-5x \leq -1$

344 $-10x \leq -2$

345 $-3x \geq -6$

346 $-100x < -100$

347 $1000x > -200$

348 $-x + 11 < 1$

ESERCIZI RIEPILOGATIVI

Eeguire quanto richiesto

- 1** AB è un segmento avente punto medio in $M(1; 3)$. Determinare le coordinate dell'estremo B sapendo che le coordinate di A sono $(-1; 4)$.
- 2** AB è un segmento avente punto medio in $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$. Determinare le coordinate dell'estremo B sapendo che le coordinate di A sono $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$.
- 3** Individuare l'equazione della retta passante per $(-1; 2)$ e parallela alla retta di equazione $6x + 3y + 1 = 0$.
- 4** Individuare l'equazione della retta passante per $(-3; -6)$ e parallela alla retta di equazione $2x - 5y = 0$.
- 5** Individuare l'equazione della retta passante per $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$ e parallela alla retta di equazione $2x + 6y + 1 = 0$.
- 6** Individuare l'equazione della retta passante per $\left(-\frac{1}{4}; -1\right)$ e parallela alla retta di equazione $2x + 4y + 3 = 0$.
- 7** Individuare l'equazione della retta passante per $(-2; -3)$ e perpendicolare alla retta di equazione $2x - 5y + 1 = 0$.
- 8** Individuare l'equazione della retta passante per $(4; 7)$ e perpendicolare alla retta di equazione $3x + 6y - 4 = 0$.
- 9** Individuare l'equazione della retta passante per $\left(-\frac{1}{4}; -1\right)$ e perpendicolare alla retta di equazione $2x + 14y - 1 = 0$.
- 10** Individuare l'equazione della retta passante per $\left(-\frac{3}{5}; \frac{5}{3}\right)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
- 11** Determinare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazioni, rispettivamente, $2x - y + 4 = 0$ e $3x - 2y + 1 = 0$ e parallela alla retta di equazione $6x + y = 0$.
- 12** Determinare l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette di equazioni, rispettivamente, $x - y + 3 = 0$ e $2x - 5y - 1 = 0$ e perpendicolare alla retta di equazione $3x + 4y + 5 = 0$.
- 13** Verificare se il triangolo di vertici $(1; 3)$, $(4; -1)$ e $(7; 3)$ è isoscele e calcolare il perimetro.

- 14** Verificare se il triangolo di vertici $(-1; 2)$, $(0; 0)$ e $(2; 1)$ è isoscele e calcolare il perimetro.
- 15** Verificare se il triangolo di vertici $(1; -1)$, $(4; -2)$ e $(2; -3)$ è isoscele e calcolare il perimetro.
- 16** Calcolare il perimetro del triangolo di vertici $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$.
- 17** Verificare che il triangolo di vertici $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $(-1; 2)$ e $(3; 1)$ è rettangolo e calcolare l'area.
- 18** Verificare che il triangolo di vertici $\left(\frac{39}{10}; \frac{13}{10}\right)$, $(5; -2)$ e $(6; 2)$ è rettangolo, calcolare area, perimetro e la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa.
- 19** Verificare che il triangolo di vertici $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{8}\right)$ e $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ è rettangolo e calcolare area e perimetro.
- 20** Calcolare l'area e il perimetro del triangolo i cui lati hanno le seguenti equazioni: $x - 2y + 1 = 0$, $2x - 3y - 1 = 0$, $4x - 5y = 2$.
- 21** Calcolare il perimetro del parallelogramma di vertici $(1; 2)$, $(6; 3)$, $(8; 7)$ e $(3; 6)$.
- 22** Calcolare il perimetro del parallelogramma di vertici $(2; 4)$, $(8; -4)$, $\left(6; \frac{3}{4}\right)$ e $\left(4; -\frac{3}{4}\right)$.
- 23** Calcolare area e perimetro del trapezio rettangolo di vertici $(2; -2)$, $(4; 1)$, $(1; 3)$ e $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.
- 24** Calcolare area e perimetro del quadrilatero di vertici $(0; 4)$, $(4; 5)$, $(3; 9)$ e $(-1; 8)$.
- 25** Determinare le coordinate dei vertici del rettangolo i cui lati appartengono alle rette di equazione: $2x + 3y + 6 = 0$, $3x - 2y + 2 = 0$, $4x + 6y = 0$, $y = \frac{3}{2}x - 2$.
- 26** Calcolare area e perimetro del rettangolo avente i lati appartenenti alle rette rispettivamente di equazione:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}, \quad 4x + 3y - 30 = 0, \quad y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad 9x - 12y - 5 = 0$$
- Verificare analiticamente che le diagonali sono congruenti.
- 27** Determinare il valore del parametro k affinché la retta $(k + 1)x + ky + k + 2 = 0$:
- non passi per l'origine degli assi;
 - sia parallela all'asse x ;
 - sia parallela all'asse y ;
 - passi per l'origine.

- 28** Determinare il valore del parametro k affinché la retta $(k+2)x + (k-1)y + k = 0$:
- sia parallela all'asse x ;
 - sia parallela alla retta di equazione $x + 2y = 1$;
 - sia perpendicolare alla retta di equazione $2x + 6y - 1 = 0$.

- 29** Determinare il valore del parametro k affinché la retta $(k-1)x + (k+1)y + 2k = 0$:
- passi per l'origine degli assi;
 - sia parallela all'asse y ;
 - sia parallela alla retta di equazione $5x + 10y - 1 = 0$;
 - sia perpendicolare alla retta di equazione $8x - 2y - 7 = 0$.

- 30** Individuare il valore di k affinché le rette rispettivamente di equazioni:

$$\frac{k}{2}x + (2k+4)y - k - \frac{1}{2} = 0 \text{ e } (k-1)x + \frac{k+2}{2}y + k = 0 \text{ siano parallele.}$$

- 31** Individuare il valore di k affinché le rette rispettivamente di equazioni:

$$(k+1)x + (2k+1)y + k - \frac{1}{3} = 0 \text{ e } (k-1)x + \frac{k+2}{2}y = 0 \text{ siano perpendicolari.}$$

- 32** Individuare il valore di k affinché siano parallele le rette aventi rispettivamente equazioni: $kx + (k-1)y - k = 0$ e $(k+1)x - ky + 2k - 1 = 0$.